Marek Kalbarczyk

Jan Omieciński

Brajlowska notacja matematyczna

Jak to zapisać, a jak odczytać?

PORADNIK

TOM 1

Fundacja

Unia Pomocy Niepełnosprawnym SZANSA

Szansa dla Niewidomych

Redaktor prowadzący:

Andrzej Zaremba

Konsultanci merytoryczni:

Magdalena Ciesielska

Ewa Fojucik

Maria Kaliszan – Kaźmierczak

Adaptacja wersji brajlowskiej, korekta:

Igor Busłowicz

Projekt okładki:

Janusz Mirowski

Wydawca:

Unia Pomocy Niepełnosprawnym SZANSA

Ul. Kameralna 1 m. 30

03-406 Warszawa

Tel. 022 827 16 18, 022 818 72 31

Druk i oprawa:

profesja**druk** sp. z o. o.

Publikacja współfinansowana przez:

Państwowy Fundusz Rehabilitacji Osób Niepełnosprawnych

Spis treści

Część I

Wprowadzenie

1. Czy matematyka jest niezbędna?

Co to jest tyflorehabilitacja, czyli rehabilitacja niewidomych? Jest to dziedzina wiedzy zajmująca się niwelowaniem skutków inwalidztwa wzroku. To przywracanie sprawności osobom, które nie mogą polegać na tym zmyśle, zgodnie z jego naturalnymi funkcjami i możliwościami. Dzięki rehabilitacji niewidomi nie odzyskują widzenia, ale radzą sobie bez niego. Nie widzą drogi, ale z powodzeniem mogą nią iść. Nie widzą krajobrazu, ale wiedzą co znajduje się dookoła. Nie widzą sklepów w ciągu komunikacyjno-handlowym, ale potrafią zrobić zakupy. Co to jest wobec tego ich nowoczesna rehabilitacja?

Możemy ją rozumieć na dwa sposoby. Jest to ta część rehabilitacji, która dotyczy umiejętności (sprawności), które są związane z najnowszymi osiągnięciami techniki. Jest to również zbiór umiejętności, dzięki którym niewidomi radzą sobie w nowoczesnym świecie, w nowoczesnym społeczeństwie informacyjnym. Nowocześnie zrehabilitowany niewidomy z powodzeniem posługuje się komputerem i przeznaczonym dla niego oprogramowaniem, telefonem komórkowym i zainstalowanymi na nim aplikacjami, internetem itd. Nie czyta wzrokiem czarnego druku, ale potrafi odczytać książki zapisane na nośnikach cyfrowych lub je zeskanować i wykorzystać program rozpoznający druk.

Co należy zrobić, by niewidomi uczniowie byli nowocześnie zrehabilitowani? Należy ukształtować w nich potrzebę nieustannej pracy nad sobą, by zniwelować skutki braku wzroku i dorównać widzącym. Zrozumienie tej potrzeby zaowocuje nieustannym powiększaniem zbioru osobistych możliwości. Gdy wszystko dookoła się rozwija, a przemysł wytwarza coraz nowocześniejsze produkty, które widzący z powodzeniem opanowują, niewidomi muszą im dorównywać. Gdy na przykład powstają nowe strony internetowe, które przedstawiają mnóstwo informacji w formie graficznej, atrakcyjnej dla widzących, by przyciągnąć ich uwagę i zdobyć ich uznanie, niewidomi muszą wykorzystać opracowane do tego celu narzędzia, rozpoznać strukturę tych stron i opanować ich odczytanie. Gdy w sklepach pojawiają się nowoczesne urządzenia, których użytkowanie wymaga znajomości obszernych instrukcji obsługi, a też ogólnej orientacji, gdy ich wyświetlacze oraz piloty zdalnego sterowania wymagają wzroku, niewidomi muszą ich używać bezwzrokowo, a poszczególne funkcje i odpowiadające im klawisze opanować pamięciowo.

W dziedzinie rehabilitacji podstawowej stawiane są nieodzowne wymagania. Czy niewidomy może osiągnąć sukces nie radząc sobie ze zwykłymi czynnościami dnia codziennego? Oczywiście, że nie. Tysiące drobnych umiejętności jest niezbędnych, by na ich bazie budować inne. Niewidomy uczeń zrehabilitowany może sobie zorganizować naukę w taki sposób, by nie tracić dystansu do widzących rówieśników. Zaprocentuje to w życiu dorosłym, na przykład wtedy, gdy będzie trzeba zaimponować pracodawcy podczas spotkania kwalifikacyjnego. Powyższe dotyczy również orientacji przestrzennej, dzięki której niewidomi nie są pozbawieni możliwości swobodnego przemieszczania się.

Nowoczesna tyflorehabilitacja informacyjna to zbiór możliwości dających niewidomym dostęp do informacji. Wymaga to posługiwania się różnymi urządzeniami technicznymi i programami komputerowymi, dzięki którym bezwzrokowe odczytanie informacji staje się realne, niezależnie od tego, w jaki sposób są one przechowywane i prezentowane. Dotyczy to zarówno wagi łazienkowej, testera kolorów, wskaźnika poziomu nagrania na magnetofonie, jak i komputera oraz oprogramowania uruchamianego na nim. Tyflorehabilitacja informacyjna to umiejętność samodzielnego zdobywania informacji i ich przetwarzania. Potrzeby te realizuje tyfloinformatyka, dzięki której bezwzrokowa praca przebiega z podobnym skutkiem, jak praca osób widzących.

Jak kształcić niewidomych, by mogli sprostać rosnącym wymaganiom rynku pracy? Należy od tych uczniów wymagać więcej niż od innych. Dotyczy to szczególnie najzdolniejszych z nich. Dzięki wytężonej pracy mogą osiągnąć sukces. Chodzi o nabytą wiedzę i umiejętność jej powiększania. Jedyną szansę na zatrudnienie stwarzają zawody intelektualne. Od lat niewidomi nie mogą znaleźć pracy w zawodach fizycznych. Pracę w zawodach intelektualnych mogą znaleźć z kolei tylko dobrze wykształceni.

Różnorodność urządzeń i programów utrudnia przygotowanie do nauki i pracy. Są jednak wśród nich produkty, które stanowią zbawienne dla niewidomych protezy wzroku, pełniące rolę interfejsu pomiędzy urządzeniem i człowiekiem. Udostępnienie komputerów oprzyrządowanych w syntezatory mowy, brajlowskie notatniki, monitory i drukarki - dają nadzieję na przyszłość. Cyfrowy sposób przechowywania informacji umożliwia wszystkim nieskrępowany dostęp do nich. Rozwinął się nowy sektor gospodarki, wytwarzający produkty niwelujące skutki inwalidztwa wzroku. Zwykłe monitory są w tym przypadku zastępowane przez monitory brajlowskie. Pracę ułatwiają syntezatory mowy udźwiękawiające systemy operacyjne i oprogramowanie komputerowe. Jest dostępne oprogramowanie rozpoznające czarny druk, łącznie z zapisem nutowym i matematycznym. Oferowane jest również oprogramowanie translujące tekst matematyczny na system brajla oraz odwrotnie. Niewidomi mogą "oglądać" grafikę w postaci wypukłej dzięki zastosowaniu graficznych monitorów brajlowskich i tzw. wygrzewarek tworzących wypukłe rysunki na pęczniejącym papierze. Niesamowity postęp związany jest z zastosowaniem systemu GPS, który przekazuje informacje o terenie. Niewidomi używają udźwiękowionych telefonów komórkowych, które nie tylko dają kontakt na odległość z rozmówcami, ale również internet, elektroniczną pocztę, umożliwiają wysyłanie i odbieranie listów, wiadomości tekstowych, dokonywanie dźwiękowych nagrań i robienie zdjęć oraz filmów.

Wykształcenie jest nieustannie najistotniejszym kluczem do sukcesu. Trudno się więc dziwić, że opracowywane są kolejne metody i poradniki ułatwiające naukę. W niniejszym poradniku zajmujemy się wykształceniem matematycznym, które - wbrew powszechnemu mniemaniu - ma dla niewidomych rosnące znaczenie. Matematyka i nierozerwalnie z nią związane dziedziny, jak informatyka, ekonomia, statystyka, elektronika, mają rosnące znaczenie. Matematyka jest nieodzowna w życiu wszystkich, mimo to, że matematykami są jedynie nieliczni. Czy można sobie wyobrazić świat bez niej? Nawet gdy sobie nie zdajemy z tego sprawy, jesteśmy matematyką osaczeni. Matematyczne informacje, oznaczenia, formuły spotykamy w każdej dziedzinie życia - codziennie. Jak zapisać te informacje? Widzący nie mają z tym problemów. Posługują się znaną im notacją, a niewidomi? Okazuje się, że zagraża im wtórny analfabetyzm. Uczniowie mają kontakt z systemem Braille'a oraz z matematyczną notacją brajlowską, ale dorośli zapominają o nich. Tymczasem wszyscy powinni wiedzieć jak poprawnie zapisać i właściwie odczytać formuły matematyczne. Jak więc zapisać tak powszechnie stosowane informacje, jak temperaturę ciała, wilgotność powietrza, wzrost PKB, kurs walut, informacje giełdowe, wymiary różnych przedmiotów - również bardzo małych i dużych? Jak odczytać równania opisujące ruch kamienia rzuconego ukośnie do góry, spadanie jabłka z drzewa, siłę przyciągania Księżyca przez Ziemię? Konieczne jest zapoznanie się z notacją matematyczną.

Właśnie to spowodowało decyzję o stworzeniu, a następnie rozwinięciu brajlowskiej notacji matematycznej. Musimy posługiwać się wcześniej przyjętymi regułami, by tekst był zrozumiały dla każdego. Widzący uczniowie naturalnie poznają czarnodrukową notację od pierwszych klas szkoły podstawowej. Podobnie powinno być w klasach, w których uczą się niewidomi.

W kolejnych rozdziałach omawiamy notację opracowaną w Niemczech przez zespół profesora Helmuta Ephesera wydaną w brajlu w roku 1986, a w czarnym druku w roku 1992. Zapoznajemy czytelników z jej rozszerzeniami dokonanymi w roku 2000, uczynionymi na potrzeby systemu Latex i Tex. Wyjaśniamy znaczenie poszczególnych oznaczeń i przedstawiamy przykłady ich zastosowania. Dla ułatwienia przekazujemy w ręce zainteresowanych poradnik przygotowany w trzech wersjach: brajlowskiej, czarnodrukowej, plików tekstowych zapisanych na płytach CD ROM oraz wykładu nagranego w formie filmu.

Poradnik niniejszy powstał dzięki pomocy finansowej Państwowego Funduszu Rehabilitacji Osób Niepełnosprawnych, który w ten sposób dołączył do Komitetu Badań Naukowych, Ministerstwa Nauki i Informatyzacji oraz Ministerstwa Edukacji Narodowej. Zainicjowały one i rozwijały projekty związane z nauczaniem i stosowaniem matematyki przez niewidomych. Dzięki tej pomocy kształcenie matematyczne niewidomej młodzieży na miarę potrzeb rozwiniętego społeczeństwa informacyjnego, staje się realne.

2. Historia pisma punktowego

System Ludwika Braille'a jest łatwy, chociaż jego czytanie opuszkami palców nie. Jego teoretyczne podstawy są zadziwiająco proste. Wydaje się, że jest to najprostszy kod spośród istniejących. Kształty liter czarnodrukowych mogą być trudne do zapamiętania dla kogoś, kto je widzi pierwszy raz, podczas gdy zapamiętanie, że literka "a" w systemie Braile'a to pojedynczy punkt zajmujący lewy górny róg sześciopunktu, nie stawia większych wymagań. 64 kombinacje sześciu punktów nie wydają się zbyt złożone. Tym bardziej, gdy są one ułożone w taki sposób, że pierwsze litery alfabetu są najprostsze, a ostatnie najbardziej skomplikowane. Można się ich nauczyć w ciągu kilku godzin. Wystarczy dostrzec prawidłowości dodatkowo ułatwiające naukę. Uwypuklone punkty należy czytać opuszkami palców, które w pierwszym etapie szkolenia nie potrafią rejestrować różnic pomiędzy poszczególnymi kształtami wypukłych znaków. Zazwyczaj nie czujemy nawet sporych różnic w fakturach materiałów, ale do czasu. Okazuje się bowiem, że palce i zmysł dotyku są zdolniejsze niż się wydaje. Opuszki palców stają się delikatniejsze. Wypukłe brajlowskie punkty przestają drażnić skórę całego palca i są odczuwane jako konkretne kropki. Od tego momentu już tylko jeden krok do sprawnego czytania brajlem. Kombinacje punktów są rozpoznawane natychmiast. Niewidomy przestaje odbierać znaki jako zbiory punktów, lecz zaczyna "widzieć" w nich odrębne kształty. Litery "l" już nie odczuwa jako trzy ustawione pionowo kropki, lecz jako wypukłą pionową kreskę. "x" nie jest już czterema punktami, lecz dwiema poziomymi kreseczkami, z których jedna jest u góry znaku, a druga u dołu.

Postanowiono zastosować ideę Ludwika Braille'a do zapisu oznaczeń i formuł matematycznych. Pojedynczy sześciopunkt udostępnia 64 różne kombinacje punktów. To wystarcza do przedstawienia liter alfabetu i znaków interpunkcyjnych. Nie wystarcza jednak dla potrzeb matematyki. Nawet cyfry nie dają się tam zmieścić. Zastosowano tu specjalny znak liczbowy, dzięki któremu cyfry to po prostu pierwsze litery alfabetu poprzedzone tym znakiem. Jedynkę zapisujemy jak literę "a" poprzedzoną znakiem liczbowym. Dwójka to "b", trójka - "c". Dziewiątka to "i", a zero - "j".

Za każdym razem należy dodać wspomniany znak liczbowy - specjalny prefiks, klucz. Liczbę 1234 zapiszemy: znak cyfry, "a", "b", "c", "d" ⠼⠁⠃⠉⠙ .

W systemie brajlowskim małe i duże litery również się nie różnią. Jak zatem się je odróżnia? Aby uzyskać dużą literę alfabetu łacińskiego należy zwykłą literę poprzedzić tak zwanym znakiem dużej litery, składającym się z dwóch punktów: (4 i 6). Małe litery w tym alfabecie mogą być pisane bez prefiksu, albo z tak zwanym znakiem małej litery będącym jednym punktem - szóstym. Podobne prefiksy stosuje się dla dużych i małych liter alfabetu greckiego i gotyckiego, często używanych w matematycznych wyrażeniach.

Tekst matematyczny jest pełen przeróżnych oznaczeń. W szkole podstawowej spotykamy ich niewiele. W gimnazjum ich liczba rośnie. Podobnie w liceum. Z prawdziwą "inwazją" mamy do czynienia na studiach matematycznych. Spotykamy wtedy setki, a nawet tysiące różnych symboli czarnodrukowych, z których każdy ma indywidualny kształt. Dla zapisu tych symboli w brajlu trzeba zastosować dużą liczbę oznaczeń zbudowanych ze znaków zajmujących kilka sąsiednich sześciopunktów. Dla oznaczenia poszczególnych grup symboli stosuje się kolejne prefiksy zwane tu kluczami. Mamy na przykład klucz stosowany dla oznaczenia funkcji trygonometrycznych. Sinus zapisujemy przy pomocy brajlowskiej litery "s" poprzedzonej kluczem składającym się z punktów: (1, 2, 4, 6).

W matematycznym systemie punktowym, wobec tak wielkiej liczby symboli, nawet dwuznaki nie wystarczają. Stosuje się wiele oznaczeń trójznakowych. Dwudziesty wiek przyniósł przełom w tej dziedzinie. Przedtem nie istniał żaden system zapisu matematyki dla niewidomych. W latach 1929-1937 pracowała nad tym międzynarodowa komisja notacji matematycznej. W oparciu o jej prace Colonel Stafford opublikował w roku 1941 w Anglii międzynarodową brajlowską notację matematyczną i chemiczną. Jego system był krokiem naprzód, ale nie tworzył ze zwykłym systemem brajlowskim jednolitego zbioru oznaczeń. W roku 1950 zaproponowano wykonanie tej pracy profesorowi Helmutowi Epheserowi. Do dzisiaj jest on najbardziej znanym autorem notacji matematycznej dla niewidomych. Jego projekt był bezkonkurencyjny. W zbiorze oznaczeń znalazły się wszystkie używane w ówczesnej matematyce symbole. Profesor zaprezentował też metody tworzenia kolejnych brajlowskich oznaczeń. Opublikowana w 1955 roku wersja międzynarodowej notacji matematycznej dla niewidomych była z powodzeniem używana przez ponad trzydzieści lat. Rozpowszechniła się w wielu krajach - również w Polsce. Na wniosek środowisk niewidomych i ich nauczycieli, opublikowano w Niemczech w roku 1986 drugą wersję tej notacji. Wydano wtedy brajlowską wersję, a w roku 1992 czarnodrukową.

Minęło kilkanaście lat i ponownie notacja wymagała rozwinięcia. Nowoczesna matematyka posługuje się symbolami, których wcześniej nie używano. Rewolucyjne zmiany nastąpiły wraz z zastosowaniem do pracy nad matematycznymi dokumentami komputerów. Naukowcy tworzący nowe teorie wprowadzają rozliczne nowe oznaczenia. Ich drukowaniem zajmuje się między innymi rodzina edytorów TEX. Najbardziej popularnym edytorem tej rodziny jest LATEX 2e. W roku 2002 doszło do rozszerzenia brajlowskiej notacji matematycznej uwzględniającej te potrzeby. Nowa wersja notacji powstała w Polsce w projekcie badawczym Komitetu Badań Naukowych realizowanym przez zespół Instytutu Podstaw Informatyki Polskiej Akademii Nauk pod kierownictwem dr Włodzimierza Wysockiego. Brali w nim udział również Marek Kalbarczyk i Igor Busłowicz. Nowa wersja notacji powstała dla komputerowego oprogramowania translującego tekst matematyczny napisany w LATEX na system brajlowski.

Na czym polega główny problem z zapisywaniem matematycznych wyrażeń w brajlu? W czarnym druku matematyczny tekst nie musi być zawarty w pojedynczych liniach. Jak zapisuje się w druku ułamki? Składają się one z licznika, kreski ułamkowej i mianownika, umieszczanych jeden pod drugim. Ułamki zajmują więc w czarnym druku trzy poziomy. W systemie brajlowskim zapisywanie wielopoziomowe nie jest możliwe. Wyrażenia matematyczne należy sprowadzić do pojedynczych linijek. Aby to było realne, należy zastosować specjalne metody sprowadzające zapis dwuwymiarowy do jednego poziomu i oznaczenia dodatkowe, opisujące poziom, na którym znajdują się kolejne oznaczenia. Gdy chcemy w ten sposób postąpić z ułamkiem, piszemy najpierw znak zapowiadający licznik, a następnie on sam. Za licznikiem umieszczamy oznaczenie kreski ułamkowej, po którym piszemy mianownik. Zapis kończymy oznaczeniem końca mianownika.

Aby zapisać zmienną "x" z dolnym indeksem "0", należy pomiędzy literę "x" i cyfrę "0" wpisać specjalny znak wskazujący, że ten indeks jest umieszczony po prawej stronie, u dołu litery "x". "x" stoi w rzędzie zerowym, czyli na normalnym poziomie, a "0" na poziomie 1. Dodatkowe oznaczenia wskazujące na zmiany poziomu w wyrażeniu nazywamy projektorami, a przekształcenie zapisu dwu- na jednowymiarowy - projektowaniem.

Konieczność zastosowania projektorów wynika z faktu, iż niewidomi nie są w stanie ogarnąć powierzchni całej strony. Właśnie dlatego zapisy wielopoziomowe nie mogą być tu zastosowane. W brajlu czyta się znak po znaku, przesuwając palce w prawo. Ci spośród nich, którzy zdążyli wcześniej poznać notację czarnodrukową i zobaczyć różne wielopoziomowe oznaczenia, czytając brajlem wyobrażają sobie powierzchniowe przedstawienie odczytywanych wyrażeń. Inni budują obraz odczytywanego tekstu na swój sposób. Zawsze jednak odczytywanie brajlowskiego tekstu pozostaje trudne.

Używana przez niewidomych notacja jest skomplikowana, ale też skuteczna. Dzięki niej mogą się uczyć matematyki na równi z widzącymi. Powstanie rozszerzonej notacji otworzyło nowe możliwości czytania matematycznych dokumentów i podręczników. Mogą one być odczytywane dzięki specjalnemu oprogramowaniu stworzonemu przez wspomnianą grupę specjalistów. Opracowali oni oprogramowanie tłumaczące tekst matematyczny nie tylko na system brajlowski, ale też na wersję lektorską, przeznaczoną do odsłuchania za pomocą syntezatorów mowy. Translator analizuje tekst matematyczny napisany w języku LATEX i generuje plik brajlowski oraz lektorski. Plik brajlowski służy do wydruku książek i czytania na brajlowskim monitorze, a lektorski naśladuje wypowiedzi czytającej osoby.

Program Translator wszedł w skład nowego pakietu programów o nazwie Euler. Drugim jego elementem jest program Homer, który umożliwia zapisanie w specjalnym edytorze tekstu matematycznego w systemie brajlowskim, a następnie jego przetłumaczenie na komendy Latex'a, a dzięki temu jego wydruk na czarnodrukowych drukarkach lub wyświetlenie na ekranie monitora. Pakiet Euler jest jedynym tego rodzaju rozwiązaniem. Dzięki niemu możliwa jest współpraca niewidomych matematyków z widzącymi osobami. Dotyczy to zarówno uczniów, studentów, jak i naukowców. Niewidomi zapisują tekst lub go odczytują w swoim systemie, podczas gdy widzący korzystają z jego wersji czarnodrukowej.

3. Rozwój notacji matematycznej dla niewidomych

Opublikowana w roku 1955 międzynarodowa notacja matematyczna dla niewidomych opracowana przez grupę specjalistów kierowanych przez profesora Helmuta Ephesera przeszła pomyślnie trzydziestoletni okres próby. Została w tym czasie rozpowszechniona w wielu krajach - również w Polsce. W roku 1967 państwo Adamczykowie przetłumaczyli ją na język polski. W ciągu kolejnych lat nastąpił burzliwy okres rozwoju nowoczesnej matematyki, któremu towarzyszyły zmiany w czarnodrukowej notacji matematycznej. Należało rozszerzyć również zbiór brajlowskich oznaczeń. Niektóre z nich zostały zawarte w dodatku, opracowanym w roku 1972. Bogaty zbiór oznaczeń strzałek został zaproponowany w wydaniu z roku 1986. Właśnie w nim grupa specjalistów, nadal pod kierownictwem Helmuta Ephesera, dokonała zmiany w koncepcji przedstawiania poziomów, na których są umieszczone czarnodrukowe symbole. Przekształcenie wielopoziomowego zapisu czarnodrukowego na zapis zawarty w jednym poziomie, nazwali projekcją.

Na czym polegało przeformułowanie sposobu zapisu projekcji w wersji z roku 1986? Wcześniej konkretnie wskazywano poziomy, na których umieszczone były czarnodrukowe symbole. Zaproponowano łatwiejszy sposób oznaczania. Wskazuje się jedynie fakt zmiany położenia kolejnych symboli. Tak więc, o ile wcześniej wskazywano, że następny symbol jest w czarnym druku umieszczony na pierwszym poziomie, a jego górny indeks na drugim, to teraz wstawia się jedynie informację o tym, że każdy z tych dwóch symboli jest wyżej od poprzedniego.

Nastąpiła zmiana symboli zaznaczających, stojących na prawo od symbolu, takich jak kółeczko, krzyżyk, plus. Kółko zostało oznaczone brajlowskim znakiem: (3, 5, 6): ⠴ , w związku z tym, że ma kształt podobny do zera, które w brajlu jest zapisywane: (2, 4, 5): ⠚ . Zmieniono pewną grupę oznaczeń relacji, zmodyfikowano reguły zapisu symboli wyrazowych i złożeń jednostek fizycznych. Zostały one uproszczone.

Uniknięto większych zmian, by nie utrudniać stosowania notacji tym, którzy przyzwyczaili się do wcześniejszych rozwiązań. W zbiorze podstawowych oznaczeń zmieniono jedynie znak dzielenia z dwukropka na znak złożony z punktów (2, 5, 6): ⠲ . Przyjęto kompleksowe rozwiązania dotyczące zaznaczania rodzajów alfabetów i druku. Wskazano zasady pomijania tych oznaczeń, których zbyt duża liczba utrudnia czytanie.

W notacji z roku 1986 brakuje oznaczeń dla akcentów mających zastosowanie do wszystkich liter alfabetu łacińskiego. Przewidziano zaledwie sześć krojów druku. Brakuje około dwustu symboli używanych w matematyce, fizyce lub informatyce i nie zaprojektowano reguł zapisu macierzy i tabel. W roku 1992 opublikowano tę notację w wersji czarnodrukowej. Wydawnictwo to nie wprowadzało żadnych zmian, a jedynie pomagało zrozumieć zasady pisania brajlowskich symboli i wyrażeń matematycznych osobom widzącym.

W latach dziewięćdziesiątych nastąpił burzliwy rozwój zastosowań komputerów w matematyce. Powstało oprogramowanie wspomagające pracę naukowców. Najważniejszym osiągnięciem na skalę międzynarodową było stworzenie rodziny języków i edytorów matematycznych TEX. Od strony edycyjnej są to proste programy. Ich najważniejszą cechą jest jednak udostępnienie setek komend, służących do redagowania matematycznych dokumentów oraz do właściwego ich przygotowania edytorskiego. Mnogość wprowadzonych oznaczeń spowodowała, iż notacja Ephesera stała się zbyt uboga, by zapisać w brajlu to, co w czarnym druku tworzą widzący matematycy. Nowoczesne programy, takie jak TEX, dają narzędzia służące do tworzenia przeróżnych oznaczeń. Prostym tego przykładem jest obszerny zbiór kółeczek. Mamy więc kółka większe i mniejsze, puste w środku lub wypełnione dodatkowymi znakami jak minus, plus, krzyżyk, kropeczka, ukośnik itd. TEX i czarnodrukowe drukarki radzą sobie z nimi z łatwością. Wystarczy stworzyć tam stosowne makroinstrukcje. Matematyczna notacja dla niewidomych pozostała w tyle. Na poziomie szkoły podstawowej nie stwarza to kłopotów, im dalej jednak, tym gorzej. W czarnym druku powinno się stosować inne znaki równości, sumowania i odejmowania dla działań arytmetycznych oraz operacji na wektorach. Te drugie zaznacza się pogrubionymi znaczkami. Zapoznanie się z tego rodzaju niuansami nie jest konieczne w pierwszych klasach szkoły podstawowej, ale później należy je omówić.

Takich przykładów jest więcej. Epheserowska notacja nie obejmuje bogactwa czarnodrukowych oznaczeń i potrzeb nowoczesnej matematyki. Wystarczy poznać zbiór komend TEX'u. Efektem wielu komend jest wydrukowanie wcześniej nieznanych symboli. W notacji z roku 1986 brakowało ich zbyt wielu. Problem stał się naglący, gdy opracowano programistyczny translator zamieniający dokumenty matematyczne, napisane w edytorze LATEX, na zapis brajlowski. W roku 2002 zespół naukowy Instytutu Podstaw Informatyki PAN przekazał Komitetowi Badań Naukowych omawiany translator oraz zmodyfikowaną w roku 2000 notację przedstawioną w dziele pt. "Matematyczne pismo punktowe dla niewidomych". Każde oprogramowanie działa dobrze wyłącznie wtedy, gdy wszystkie jego instrukcje są poprawne. Dotyczy to również procedur realizujących komendy drukujące poszczególne oznaczenia. Notacja brajlowska powinna zatem zawierać wszystkie symbole zaprojektowane w czarnym druku, używane w rodzinie TEX. Rozwinięcie brajlowskiej notacji matematycznej realizuje ten cel.

Najnowsza wersja notacji nie tylko przedstawia kompletny zbiór symboli i ich brajlowskich oznaczeń, ale również instruuje, w jaki sposób przygotować do wydruku podręczniki matematyczne. W następnych rozdziałach omawiamy w szczegółach tę notację. Wszystkie oznaczenia są pogrupowane merytorycznie tak, jak je uporządkował profesor Epheser. Wszystkie jego oznaczenia zostały wykorzystane. Wprowadzone nowe oznaczenia są z kolei skonstruowane zgodnie z wytyczonymi przez profesora zasadami. Dzięki temu nowa wersja notacji nie sprawia kłopotów w jej opanowaniu.

Część II

Omówienie brajlowskiej notacji matematycznej

1. Informacje ogólne

Podstawowym elementem, z którego buduje się brajlowskie znaki, jest wypukły punkt. Punkty są wytłaczane na tzw. brajlowskim papierze, albo uwypuklane na brajlowskich monitorach. Aby powstał wypukły punkt na papierze, wystarczy go nakłuć. Powstanie cienka kropeczka, którą można wyczuć opuszkami palców. Na brajlowskim monitorze, który jest urządzeniem elektronicznym, wypukły punkt powstaje poprzez wypchnięcie do góry cieniutkiej szpileczki. Wychyla się ona ponad poziomą linijkę. Normalnie w stanie spoczynku, szpileczka jest schowana wewnątrz niej. Gdy ma wejść w skład brajlowskiego znaku, jest wypychana do góry przez specjalny element piezoelektryczny, który się wygina pod wpływem napięcia elektrycznego. To bardzo prosta zasada. Komputer sterujący pracą monitora rozkazuje mu "wyświetlić" konkretny znak. Analizator urządzenia decyduje o tym, które punkty mają być wypchnięte do góry i "kieruje" prąd do odpowiednich piezoelektryków. Te wyginają się i wypychają właściwe punkty. Dzięki temu niewidomi mogą czytać w nowy sposób. Dla tego środowiska oznacza to rewolucyjną zmianę. Od tego czasu niewidomi mają dostęp do informacji zapisanej cyfrowo.

Z takich pojedynczych punktów budujemy brajlowskie znaki. Układamy z nich różne kombinacje w ramach tzw. sześciopunktu. Sześciopunkt to dwie pionowe kolumienki po trzy punkty w jednej. W ramach takiego układu można poszczególne punkty uwypuklić, albo pozostawić "płaskie". Powstają w ten sposób różne wypukłe kształty, które odpowiadają poszczególnym znakom.

Na pierwszym etapie nauki niewidomi nie potrafią odczuwać, które punkty w znaku są uwypuklone. Z biegiem czasu dotyk się poprawia i czytanie staje się realne. Na koniec, nie analizuje się, które punkty wchodzą w skład znaku, lecz jaki tworzą kształt. Zamiast odczuwać, że literka "l" to trzy pionowe punkty w lewej kolumnie sześciopunktu, rozpoznajemy pionową kreseczkę. Punkty się zlewają w linie. Ta prawidłowość zasugerowała metodę tworzenia tzw. brajlowskich rysunków. Są one tworzone z pojedynczych wypukłych punktów, umieszczonych blisko siebie. Zlewają się one w całość i są odbierane jak linie, albo wypukłe powierzchnie. Niewidomi uczą się rozpoznawania palcami liter, cyfr i innych znaków tak samo, jak wypukłych rysunków. Trzy pionowe punkty w lewej kolumnie sześciopunktu, to "l". Jak wygląda przedstawione tą metodą jabłko, albo pałac?

Kombinacji punktów w ramach jednego sześciopunktu jest zbyt mało, by wystarczyły dla oznaczenia wszystkich czarnodrukowych symboli. W alfabecie, zbiorze znaków interpunkcyjnych oraz w zbiorze cyfr jest więcej znaków niż 64. W tej sytuacji należało sięgnąć po dwa oczywiste rozwiązania.

Pierwsze z nich to zastosowanie do jednego oznaczenia kombinacji zbudowanych w oparciu o kilka sąsiednich sześciopunktów. Liczba możliwych kombinacji przy takim rozwiązaniu bardzo wzrasta. Ma ono jednak istotną wadę - oznaczenia brajlowskie rozrastają się, utrudniając czytanie i zabierając miejsce na papierze. Oczywiste, że dla projektantów oznaczeń najłatwiej byłoby zaproponować długie i jasne dla wszystkich oznaczenia. Można byłoby zrezygnować z notacji matematycznej i zastosować omówienia słowne. Nie mielibyśmy w brajlu znaku plusa "+", lecz przy okazji każdego dodawania pisalibyśmy słowo "plus". Lepiej jednak zaprojektować oznaczenia i nauczyć się notacji. Oznaczenia te muszą być jednoznaczne i jak najkrótsze.

Drugie rozwiązanie polega na zastosowaniu identycznych brajlowskich oznaczeń dla różnych czarnodrukowych symboli. Dzięki temu pomysłowi już w ramach pojedynczego sześciopunktu zwiększa się liczba możliwych do wykorzystania kształtów. W jaki sposób rozpoznać, o które znaczenie kombinacji punktów chodzi? Decydujący jest wtedy fakt, czy oznaczenie sąsiaduje z innymi znakami bezpośrednio, czy też przeciwnie - jest oddzielone od nich odstępami. Dotyczy to zarówno lewej, jak i prawej strony oznaczenia. Tak więc ten sam brajlowski znak, który po lewej stronie ma odstęp, oznacza co innego, niż gdy bezpośrednio sąsiaduje z innym znakiem. Krótko mówiąc, znaczenie znaku zależy od kontekstu, w którym się znajduje. Rozwiązanie to zaproponował Helmut Epheser w swoich opracowaniach, zarówno z roku 1955, jak i 1986. Zostało ono pozytywnie przyjęte przez środowisko i od kilkudziesięciu lat korzystamy z jego pracy. Wyróżnia się trzy rodzaje sytuacji. Są oznaczenia, które muszą mieć odstęp po jednej lub dwóch swoich stronach, oznaczenia, które nie mogą mieć w sąsiedztwie odstępów oraz oznaczenia, dla których nie ma w tej sprawie różnicy. Te ostatnie mają tak unikalny kształt, że nie mogą się pomylić z innymi znakami. Ich kształt jest tak wyjątkowy, niepowtarzalny, że są one jednoznacznie rozpoznawalne bez względu na to, czy są w sąsiedztwie innych znaków, czy nie.

Zasady dotyczące sąsiedztwa znaków, czyli ich położenie względem sąsiadów, są w notacji pokazywane za pomocą wypełnionych sześciopunktów. Reprezentują one dowolne znaki, które mogą pojawić się w sąsiedztwie lub muszą być oddzielone odstępem. Sześciopunkty te nie tylko wskazują na charakter znaków, ale pomagają również w prawidłowym odczytaniu brajlowskich kształtów znaków. Ułatwiają rozszyfrowanie punktów, z jakich są one zbudowane. Czasem jednak sześciopunkt jest elementem oznaczenia. Takie sytuacje wyraźnie zaznaczamy.

Układ punktów brajlowskich, z których składa się oznaczenie, jest zaprezentowany w postaci ciągu nawiasów okrągłych, oddzielonych przecinkami i odstępami - spacjami. Gdy znak jest zbudowany w oparciu o pojedynczy sześciopunkt, wystarczy jeden nawias. W przeciwnym przypadku koniecznych jest kilka nawiasów. Wewnątrz nich wyliczamy brajlowskie punkty składające się na znak, oddzielone kolejnymi przecinkami. Pomiędzy tymi numerami nie wpisujemy już odstępów.

<u>Przykład:</u>

Literę "a" zapisujemy jako: (1), a literę "b" jako: (1,2).

Znak poprzedzający cyfry (znak liczbowy) zapisujemy: (3,4,5,6) ⠼ . Ten znak nazywamy kluczem zapowiadającym cyfrę lub liczbę złożoną z więcej niż jednej cyfry.

Brajlowskie "1", to dwa znaki: znak cyfry i "a". Zapisujemy: (3,4,5,6), (1) ⠼⠁

W poradniku używamy skrótów dla najczęściej powtarzających się słów.

sz - to pełny sześciopunkt: (1,2,3,4,5,6),

dl - to znak dużej litery: (4,6),

zn - to znak cyfry, znak liczbowy: (3,4,5,6),

o - to odstęp, spacja, znak pusty: ().

Skróty te mają dodatkowe pozytywne znaczenie. Są łatwiej zrozumiałe dla czytelników widzących, którzy korzystają z czarnodrukowej wersji poradnika.

W kolejnych rozdziałach przedstawiamy i omawiamy tabele oznaczeń, które zostały zaproponowane przez profesora Ephesera w roku 1986, a które zostały następnie przypomniane w rozszerzonej notacji z roku 2000. Aby ułatwić ich lekturę, wskazujemy przed tabelami ich numery zgodnie z tymi publikacjami, umieszczone w kwadratowych nawiasach.

2. Znaczenie brajlowskich znaków w zależności od sąsiedztwa

Na podstawie pozycji znaku względem jego sąsiadów, można określić, o które jego znaczenie chodzi. Idea nadawania znaczenia brajlowskiemu symbolowi w zależności od tego, co znajduje się po jego obu stronach, jest ciekawa i ważna. Dzięki niej mamy do dyspozycji o wiele więcej możliwości merytorycznych w ramach jednego sześciopunktu. Notacja profesora Ephesera wprowadza trzy zasady i definicje określające znaczenie brajlowskich oznaczeń.

Najpierw jednak przedstawmy problem w jak najprostszych słowach. Każda rzecz ma określone znaczenie, konkretną przydatność, to znaczy zbiór funkcji, do których służy. Ma też wiele cech, po których ją rozpoznajemy. Zazwyczaj jest tak, że rzecz jest jednoznaczna, to znaczy jest jednoznacznie rozpoznawana. Zdarza się, że widzimy coś po raz pierwszy w życiu. Wtedy pytamy, co to jest i do czego służy. Nie wiemy, w jaki sposób się tę rzecz używa. Wszystkiego musimy się dowiedzieć. Gdyby przybysz z Afryki zobaczył notebook, to nie miałby pojęcia, co to jest! Co prawda teraz i notebooki są znane niemal w każdym zakątku świata, ale założyliśmy, że są jeszcze tacy, którzy się z nim nie spotkali. Bez trudności rozpoznajemy rzeczy jednoznacznie identyfikowalne. Wiemy, że przedmiot, który mamy rozpoznać, to talerz, czajnik, filiżanka, radioodbiornik lub dyktafon itd. Gdy jednak ktoś zapyta o przedmiot, który może pełnić różne funkcje? Zdarza się, że ta sama rzecz może pełnić inne zadania zależnie od decyzji jej właścicieli. Czy mamy na wycieczce do czynienia z pałacem, czy zamkiem? Czy w Warszawie jest Pałac, czy Zamek Królewski? Jak to określić? Skąd się tego dowiedzieć? Decyduje o tym historia, otoczenie albo funkcje, które były lub są nadal tam realizowane.

Podobnie z brajlowskimi znakami. Weźmy pod uwagę najprostszy znak. To pojedynczy punkt ulokowany w pierwszej kolumnie na górze. To tak zwany punkt pierwszy. W alfabecie oznacza literę "a". Gdy jednak punkt ten będzie poprzedzony przez znak cyfry (3,4,5,6), to ten pojedynczy punkt będzie oznaczał "1". Gdy poprzedzimy go innymi znakami kluczowymi, otrzymamy: małą lub dużą literę "a", małą lub dużą grecką literę alfa, gotycką literę "a" itd. Znaczenie brajlowskiego znaku zależy od jego sąsiedztwa. "a" małe zamienia się na duże, gdy występuje przed nim oznaczenie dużej litery, znak (4,6)⠨ . Nasze "a" zamieni się w alfa, gdy wystąpi przed nim oznaczenie małej litery alfabetu greckiego ⠰ (5,6). Są jednak bardziej skomplikowane przykłady. Weźmy pod uwagę prosty i powszechnie używany znak plusa ⠖ - (2,3,5). Gdyby nie zostawić przed tym znakiem odstępu po liczbie 1, to z jedynki zrobiłby się ułamek jedna szósta. Plus jest bowiem takiego samego kształtu, co obniżona cyfra sześć, która służy do zapisu liczbowych mianowników w ułamkach. Jakże to mała różnica!

⠼⠁ ⠖⠼⠃⠒ oznacza: "jeden plus dwie trzecie".

⠼⠁⠖⠼⠃⠒ oznacza "jedna szósta i dwie trzecie",

jakkolwiek ten zapis interpretować merytorycznie. Umieszczenie w tekście matematycznym odstępów lub ich pominięcie ma więc znaczenie kluczowe. Musimy zatem poświęcić mu trochę uwagi. Aby temat ten przedstawić, wprowadzimy kilka określeń. W gruncie rzeczy są proste, choć na pierwszy "rzut oka" wydają się skomplikowane. Należy najpierw zapamiętać, że sąsiedztwo znaków zaznaczamy sześciopunktami. We wszystkich oznaczeniach sześciopunkty oznaczają dowolne znaki, które mogą w ich miejscu wystąpić. Nie określamy, jakie to będą znaki. Chodzi jedynie o fakt, że jakieś znaki mogą tam być umieszczone. Odstęp, czyli spacja, oznacza natomiast, że ma to być miejsce puste, pozostawione bez żadnego znaku. Poniżej nazwy "symbol", czy "znak" używamy zamiennie.

Strona brajlowskiego symbolu nazywana jest swobodną, gdy jego sąsiedni znak może, ale nie musi, być oddzielony od niego odstępem. W tabelach notacyjnych jest to przedstawione poprzez nie wpisanie po tej stronie symbolu sześciopunktu. Symbol taki może zatem sąsiadować z innym brajlowskim znakiem bezpośrednio lub być od niego oddzielony odstępem.

Strona brajlowskiego symbolu nazywana jest przyciągającą, gdy sąsiedni znak musi do tego symbolu przylegać - nie mogą one być oddzielone odstępem. W tabelach notacyjnych jest to przedstawione w taki sposób, że bezpośrednio przy symbolu jest umieszczony sześciopunkt. Symbol taki musi zatem sąsiadować z innym brajlowskim znakiem bezpośrednio.

Strona brajlowskiego symbolu nazywana jest odpychającą, gdy przy tym symbolu, po tej stronie, musi wystąpić odstęp. W tabelach notacyjnych jest to przedstawione w taki sposób, że bezpośrednio przy tym symbolu znajduje się odstęp, a dalej odseparowany od niego sześciopunkt.

Tak, jak mówimy o stronach symboli, mówimy o nich samych. Są więc symbole lewostronnie, prawostronnie lub obustronnie: przyciągające, odpychające lub swobodne. Określenia te odpowiadają wymienionym definicjom dotyczącym stron symboli.

3. Reguła pustych miejsc

Dla prawidłowego zapisywania i odczytywania matematycznego tekstu należy dobrze zrozumieć poniższą regułę.

Reguła pustych miejsc:

Pomiędzy dwoma sąsiednimi symbolami brajlowskimi nie może być pozostawione puste miejsce (odstęp), gdy odpowiednia strona chociażby jednego z dwóch spotykających się symboli jest przyciągająca.

Jeśli żadna strona sąsiadujących ze sobą symboli nie jest przyciągająca, ale przynajmniej odpowiednia strona jednego z tych dwóch symboli jest odpychająca, to musi pomiędzy takimi symbolami pozostać puste miejsce.

W przypadku sąsiadowania ze sobą dwóch symboli, których odpowiednie strony są swobodne, pozostawienie pustego miejsca jest dozwolone, ale niekonieczne.

Co mamy na myśli pisząc "odpowiednie strony"? Chodzi o te strony sąsiadujących ze sobą symboli, które się ze sobą spotykają. Tak więc w przypadku symbolu stojącego z lewej strony chodzi o jego prawą stronę, a w przypadku symbolu prawego - o lewą. W obu przypadkach chodzi o stronę "znajdującą się pomiędzy" sąsiadami.

W przykładzie, który już przedstawiliśmy, odstęp jest zatem nieodzowny:

⠼⠁ ⠖⠼⠃⠒

Bez niego wyrażenie przestaje być sumą (brak odstępu zmienia jego znaczenie), gdyż symbol operacji dodawania jest lewostronnie odpychający. Pomiędzy jedynką i znakiem dodawania musi wystąpić odstęp. Przy zastosowaniu tej reguły należy uwzględnić kilka uzupełnień, o których jest mowa w części III, w rozdziale 5.

4. Pomocnicze oznaczenia techniczne

Nie możemy przystąpić do omawiania brajlowskich oznaczeń nie wyjaśniając oznaczeń, które są niezbędne w każdym tekście, również niniejszego poradnika. Musimy przedstawić specjalne oznaczenia brajlowskie, które nie występują w czarnym druku, a w brajlowskich formułach są nieodzowne. Nie możemy ich zaprezentowania opóźnić, gdyż będą nam potrzebne już zaraz.

[Tabela 1]

1. tekst matematyczny	⠐⠂⠿
2. tekst zwykły	⠠⠄⠿

3. złamanie formuły w miejscu pustego znaku ⠿⠠

4. złamanie formuły w miejscu nie będącym pustym znakiem ⠿⠈

5. znak ścieśniania ⠿⠈⠿

6. zapowiedź znaku interpunkcyjnego ⠿⠠⠿

7. brajlowska uwaga techniczna ⠯⠯

Oznaczenie przejścia od tekstu zwykłego do tekstu matematycznego (znak 1. z powyższej tabeli):

(5), (2), sz - ⠐⠂⠿

jest często pomijane w brajlowskich publikacjach. Tymczasem jest ono nieodzowne - podobnie jak następne. Notacja matematyczna znacznie się różni od zwykłej. Jak już omówiliśmy, te same brajlowskie znaki oznaczają w obu przypadkach co innego. Dzięki oznaczeniom 1 i 2 dowiadujemy się, jak należy interpretować tekst. Oto prosty przykład. Brajlowski znak: ⠣ oznacza w tekście zwykłym literę "ł", a w matematycznym otwierający nawias okrągły. Gdy napotkamy w tekście oznaczenie 1. wiemy, że następujące po nim znaki należy traktować jako symbole matematyczne. Gdy napotkamy oznaczenie 2., następujący po nim tekst jest zwykły (literacki).

Oznaczenie przejścia od tekstu matematycznego do tekstu zwykłego, to:

(6), (3), sz - ⠠⠄⠿

Matematyczne formuły nie muszą zmieścić się w jednej linijce. Dokładniej mówiąc, w brajlu zdarza się to nadzwyczaj często, bo brajlowskie linijki są krótkie. W czarnym druku może zmieścić się w jednej linijce 60 i więcej znaków, a w brajlu około 30. Dłuższe formułki należy kontynuować w kolejnych linijkach. Należy zaznaczyć ten fakt trzecim znakiem z powyższej tabeli. Formuły można łamać w miejscach, w których są odstępy, albo przeciwnie - tam, gdzie kolejne znaki występują jeden po drugim, bez przerwy. Nie znaczy to, że możemy przejść do następnej linijki łamiąc obszerniejsze brajlowskie oznaczenie:

⠫⠎⠠⠭ lub ⠼⠁⠃⠉⠄⠙⠑⠋ .

Oznaczenie 3. z powyższej tabeli przedstawia się następująco:

sz, (6) - ⠿⠠

a oznaczenie 4., znak kontynuacji zapisu w następnej linijce formuły złamanej w miejscu nie będącym pustym znakiem:

sz, (4) - ⠿ ⠈

Kolejny znak z tabeli został określony przez profesora Ephesera jako znak ścieśniania zapisu w obrębie jednej formuły. W Polsce określenie to nie jest jasne. Być może mamy do czynienia z różnicami językowymi, a polskie tłumaczenie nie odpowiada zamysłowi profesora. Co bowiem to oznaczenie ścieśnia? Na pierwszy rzut oka matematyczne formuły nie stają się dzięki niemu "ciaśniejsze". Oto szczegółowy zapis tego oznaczenia. W gruncie rzeczy jest to po prostu brajlowski czwarty punkt:

sz, (4), sz - ⠿ ⠈ ⠿

Czwarty punkt służy na przykład do zaznaczenia faktu, iż następujące po nim znaki są tej samej kategorii, co poprzednie. Informuje o kontynuowaniu zapisu w tym sensie, że narzucone wcześniej obwarowania dotyczące oznaczeń są kontynuowane. Stosuje się go więc do określenia rodzaju alfabetu dla liter stojących po nim. Litery te są identyczne do tych, które stoją przed nim. W innym przypadku, gdyby czwarty punkt nie został użyty, musielibyśmy przed następnymi literami wpisać oznaczenie alfabetu. W tym zastosowaniu znak ten rzeczywiście ścieśnia formułę. Czwarty punkt napisany w liczniku lub mianowniku ułamka oznacza ich kontynuację. Umożliwia to pominięcie oznaczenia początku licznika i znaku kończącego mianownik.

Zapowiedź znaku interpunkcyjnego jest niemal zawsze nieodzowna. Oto szczegółowy zapis - to po prostu szósty punkt:

sz, (6), sz - ⠿ ⠠ ⠿

Najczęściej nie można napisać znaku interpunkcyjnego bez tego dodatkowego znaku, pod groźbą utraty jego interpunkcyjnego znaczenia. Na przykład średnik napisany po dwójce nie byłby średnikiem, lecz oznaczałby mianownik ułamka: "dwie drugie". Porównajmy:

⠼ ⠃ ⠠ ⠆ i ⠼ ⠃ ⠆

Czasem brajlowski tekst nie jest zrozumiale napisany. Pomimo stosowania się do istniejących notacji, możemy być zmuszeni do zapisu, który nie będzie łatwy do odczytania. Stosujemy w takich przypadkach oznaczenie zapowiedzi brajlowskiej uwagi technicznej: (1,2,3,4,6), (1,2,3,4,6) - ⠯⠯
które daje możliwość dodatkowego wyjaśnienia zapisu.

5. Liczby i alfabety

5.1 Wyciąg z tablicy Monniera

Oto podstawowy alfabet łaciński oraz kilka uwag o jego budowie w systemie Ludwika Braille'a:

a ⠁ b ⠃ c ⠉ d ⠙ e ⠑ f ⠋ g ⠛ h ⠓ i ⠊ j ⠚
k ⠅ l ⠇ m ⠍ n ⠝ o ⠕ p ⠏ q ⠟ r ⠗ s ⠎ t ⠞
u ⠥ v ⠧ x ⠭ y ⠽ z ⠵

Litery z drugiej dziesiątki alfabetu różnią się od liter stojących w pierwszym rzędzie jedynie dodatkowym trzecim punktem. W obrębie czterech punktów: 1, 2, 4, 5, brajlowskie oznaczenia są identyczne. Do liter trzeciej dziesiątki dodano dwa dolne punkty: trzeci i szósty.

Oznaczenia liter pierwszej dziesiątki są też uporządkowane. Najpierw wykorzystano pierwszy punkt:

- litera "a" - (1),

  następnie układy dwupunktowe:
- litera "b" - (1,2),
- litera "c" - (1,3).

Możemy skonstruować 8 liter zawierających pierwszy punkt, toteż "i", które jest dziewiątą literą, jest zbudowane z punktów: (2,4). Następne po nim "j" to (2,4,5).

5.2 Polskie litery ze znakami diakrytycznymi

Litery diakrytyczne w alfabecie polskim są dodane do alfabetu łacińskiego na następujących zasadach:

1. poprzez dodanie do litery podstawowej szóstego punktu:
   a ⠁ c ⠉ e ⠑
   ą ⠡ ć ⠩ ę ⠱
2. poprzez zamianę trzeciego na szósty punkt:
   l ⠇ n ⠝ s ⠎
   ł ⠣ ń ⠹ ś ⠪
3. poprzez lustrzane odbicie liter:
   u ⠥ z ⠵
   ó ⠬ ź ⠮

Poniżej zamieszczamy listę polskich znaków diakrytycznych, w której wskazujemy, które akcenty zostały wykorzystane dla ich stworzenia.

1. "a cedilla" - (1,6) ⠡
2. "c acute" - (1,4,6) ⠩
3. "e cedilla" - (1,5,6) ⠱
4. "zmodyfikowane ukośną kreseczką l"- (1,2,6) ⠣
5. "n acute" - (1,4,5,6) ⠹
6. "o acute" - (3,4,6) ⠬
7. "s acute" - (2,4,6) ⠪

8. "z acute" - (2,3,4,6) ⠮
9. "z z kropką" - (1,2,3,4,6) ⠯

<u>Przykład:</u>

Oto kilka najważniejszych znaków interpunkcyjnych:

kropka - (3) ⠿⠄
przecinek - (2) ⠿⠂
dwukropek - (2,5) ⠿⠒
średnik - (2,3) ⠿⠆
znak zapytania - (2,6) ⠿⠢
wykrzyknik - (2,3,5) ⠿⠖
cudzysłów otwierajacy i zamykający - (2,3,6) i (3,5,6) ⠿⠦ i ⠿⠴

5.3 Liczby arabskie poprzedzone znakiem liczbowym (3,4,5,6) ⠼

Cyfry zapisujemy tak:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
⠼⠁	⠼⠃	⠼⠉	⠼⠙	⠼⠑	⠼⠋	⠼⠛	⠼⠓	⠼⠊	⠼⠚

Gdy korzystamy z brajlowskich monitorów podłączonych do komputerów, mamy do czynienia z innym zapisem cyfr. W ich przypadku każde oznaczenie musi zajmować dokładnie jeden sześciopunkt. Właśnie to wymogło na producentach decyzję, że brajlowskie monitory muszą mieć znaki ośmiopunktowe. Cyfry i liczby nie mogą być poprzedzone znakiem cyfry. Do oznaczeń pierwszych dziewięciu liter alfabetu dodaje się na przykład szósty punkt.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

⠡ ⠣ ⠩ ⠹ ⠱ ⠫ ⠻ ⠳ ⠪ ⠺

W zapisie 8-punktowym zamiast punktu 6 można zastosować punkt 8. W tych samych urządzeniach, do oznaczenia dużych liter zwyczajowo dodaje się do nich punkt siódmy.

Dla zapisania liczebników porządkowych stosujemy tak zwany zapis obniżony, w którym cyfry nie są rozmieszczone w górnym czteropunkcie sześciopunktu, lecz niżej:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

⠼⠂ ⠼⠆ ⠼⠒ ⠼⠲ ⠼⠢ ⠼⠖ ⠼⠶ ⠼⠦ ⠼⠔ ⠼⠴

Można spotkać zapis obniżony dla cyfr bez poprzedzania ich znakiem liczbowym. Jest tak na przykład w amerykańskiej notacji brajlowskiej. Przed cyframi umieszczamy dla ułatwienia ich odczytania sześciopunkty:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

⠿⠂ ⠿⠆ ⠿⠒ ⠿⠲ ⠿⠢ ⠿⠖ ⠿⠶ ⠿⠦ ⠿⠔ ⠿⠴

Przecinek dziesiętny to drugi punkt:

sz, (2), sz - ⠿⠂⠿

Kropkę grupującą, oddzielającą grupy jedności, tysięcy, milionów itd., zapisujemy przy pomocy trzeciego punktu:

sz, (3), sz - ⠿⠄⠿

W miejscu grupującej kropki, w dużych liczbach możemy pomiędzy poszczególnymi grupami umieścić odstęp.

<u>Przykład:</u>

Oto oznaczenia podstawowych działań arytmetycznych:

dodawanie [plus] - (2,3,5) ⠿⠖

odejmowanie [minus] - (3,6) ⠿⠤

mnożenie [kropka] - (3) ⠿⠄

dzielenie [dwukropek] - (2,5,6) ⠿⠲

znak równości - (2,3,5,6) ⠿⠶

znak potęgowania - (3,4,6) ⠿⠬

znak pierwiastkowania- (1,4,6) ⠿⠩

Przykład:

Godzinę można zapisać na przykład tak:

⠼⠁⠚⠄⠁⠑ - dziesiąta piętnaście

Jak wspomnieliśmy powyżej, w Polsce, do oddzielania w liczbie części całkowitej od części ułamkowej, używa się przecinka, a do oddzielania grup liczb - kropki, odwrotnie niż w notacji amerykańskiej.

Przykład:

⠼⠃⠃⠂⠁⠛⠑ oznacza liczbę 22 i 175 tysięcznych, natomiast:

⠼⠃⠃⠄⠁⠛⠑ oznacza liczbę 22 tysiące 175.

Ułamki zwykłe zapisujemy za pomocą znaku liczbowego, po którym następuje licznik, zapisany normalnymi cyframi i mianownik, zapisany bez odstępu cyframi obniżonymi.

Przykład:

$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{5}{12}$

⠼⠁⠲ ⠼⠃⠖ ⠼⠑⠂⠆

$$\frac{31}{15} \qquad\qquad \frac{101}{10}$$

⠼⠉⠁⠂⠢   ⠼⠁⠚⠁⠂⠴

Liczby mieszane zapisujemy w ten sposób, że najpierw piszemy liczbę całkowitą, zapisaną normalnymi cyframi, a następnie ułamek zgodnie ze wskazówką przedstawioną powyżej. Obu tych części nie oddzielamy odstępem, a poprzedzamy znakiem liczbowym.

<u>Przykład:</u>

$3\frac{5}{7}$ ⠼⠉⠼⠑⠶ - trzy i pięć siódmych

$5\frac{1}{2}$ ⠼⠑⠼⠁⠆ - pięć i jedna druga

5.4 Liczby rzymskie

[Tabela 2.2]

jeden	⠨⠊
dwa	⠨⠊⠊
trzy	⠨⠊⠊⠊
cztery	⠨⠊⠧
pięć	⠨⠧
sześć	⠨⠧⠊
siedem	⠨⠧⠊⠊
osiem	⠨⠧⠊⠊⠊
dziewięć	⠨⠊⠭

dziesięć ⠨⠭

pięćdziesiąt ⠨⠇

sto ⠨⠉

pięćset ⠨⠙

tysiąc ⠨⠍

Liczby rzymskie zapisuje się stawiając obok siebie kolejne znaki. Nie oddzielamy ich odstępami. Jedynie przed pierwszą cyfrą piszemy w brajlu znak dużej litery.

Przykład:

⠨⠭⠊ = 11

⠨⠭⠧⠊⠊⠊ = 18

⠨⠭⠇ = 40

⠨⠇⠭ = 60

⠨⠭⠉ = 90

⠨⠉⠙ = 400

⠨⠙⠉ = 600

⠨⠉⠍ = 900

⠨⠍⠉⠍⠇⠊⠧ = 1954

⠨⠍⠍⠧⠊⠊⠊ = 2008

6. Akcentowanie liter

Akcenty stosowane są w różnych sytuacjach. Służą na przykład do zaznaczania specjalnych sylab i liter. Sylaby zaznaczamy, gdy chcemy wskazać, że są one akcentowane fonetycznie. Używamy do tego celu na przykład apostrofu. W systemie brajlowskim będzie to czwarty punkt. Wyróżnione litery mogą być zaznaczane przez znaki diakrytyczne. W narodowych alfabetach jest wiele takich liter. W czarnym druku powstają one poprzez dopisanie do ich znaku podstawowego diakrytycznego dodatku. W systemie brajlowskim najczęściej nie jest to możliwe. Co prawda, na przykład litera "ą" powstaje w brajlu z litery "a", poprzez dodanie punktu szóstego do pierwszego. Odpowiada to dodaniu w czarnym druku ogonka do litery "a". Jednak nie można w brajlu taki sposób postąpić na przykład z literą "n", aby powstało "ń". Są zatem we wszystkich narodowych alfabetach zaprojektowane osobne znaki dla tego rodzaju liter. Polskie litery ze znakami diakrytycznymi zostały przedstawione w części II, w rozdziale 5.2. Takie specjalne litery dla innych alfabetów są natomiast przedstawione w tablicy Monniera.

Do zaznaczania specjalnych liter w alfabetach narodowych nie używa się zaproponowanych przez notację matematyczną akcentów. W tekście matematycznym można zaznaczać przy pomocy akcentów dowolne znaki. W czarnym druku jest to proste. Wystarczy dopisać do nich dodatkowy znak diakrytyczny dokładnie tak, jak w przypadku zwykłych liter. Nie ma różnicy pomiędzy literą "a" oraz "x". W systemie brajlowskim, jak już powiedzieliśmy w odniesieniu do litery "n", nie jest to możliwe. Nie istnieje metoda na dodanie dodatku do większości brajlowskich liter w ramach jednego sześciopunktu. Akcentowanie dowolnych znaków w tekście matematycznym wymagało zaprojektowania specjalnych oznaczeń dla akcentów. Przedstawiamy je w części IV w rozdziale 3. Pokazany tam sposób nie jest prosty i oszczędny, ale jednoznaczny.

Skoro akcent służący do zaznaczania sylab akcentowanych fonetycznie zapisujemy punktem 4, to zdecydowano, że wszystkie akcenty będą rozpoczynały się tym znakiem. Skomplikowane brajlowskie oznaczenia akcentów mogą być stosowane do wszelkich znaków. Są ulokowane wewnątrz formuł matematycznych. Nie mogą być oddzielane odstępami od swoich sąsiadów - są obustronnie przyciągające.

7. Procenty i promile

Temperatura i miara kąta

[Tabela 3]

1. procent	⠼⠚⠴	⠼⠴
2. promil	⠼⠚⠴⠴	⠼⠴⠴
3. stopień	⠿⠴	⠿⠘⠴
4. stopień Celsjusza	⠿⠴⠨⠉	⠿⠘⠴⠨⠉
5. stopień Fahrenheita	⠿⠴⠨⠋	⠿⠘⠴⠨⠋
6. stopień Kelvina	⠿⠴⠨⠅	⠿⠘⠴⠨⠅
7. stopień Kelvin (alternatywny zapis)	⠿ ⠨⠅ ⠿	
8. minuta	⠿⠔	⠿⠘⠔
9. sekunda	⠿⠔⠔	⠿⠘⠔⠔
10. centystopień	⠿⠐⠴	⠿⠌⠠⠛
11. centyminuta	⠿⠐⠔	⠿⠌⠠⠉
12. centysekunda	⠿⠐⠔⠔	⠿⠌⠠⠉⠉
13. radian	⠼⠗	
14. steradian	⠼⠗⠬⠔	

W szczegółowym omówieniu powyższych symboli, które zamieszczono w części IV, w rozdziale 4, są opisy ich czarnodrukowych kształtów. Ci, którzy interesują się matematyką, powinni bowiem znać czarnodrukową notację, chociażby po to, by porozumieć się z innymi uczniami, matematykami i lektorami.

Należy dodać, że w powyższej tabeli, drugie oznaczenia przedstawionych symboli są dodatkowe i rzadko używane. Nie polecamy ich używania przez uczniów. Zostały one zamieszczone jedynie w tym celu, by nie zaskakiwały, gdy znajdą się w podręcznikach, których jest przecież wiele.

Przykład:

Temperatura w piekarniku podczas pieczenia ciasta przekroczyła 215 stopni Celsjusza, więc zmniejszono gaz do temperatury 180 stopni. Dane o temperaturze zapisujemy:

215°C i 180°C i .

Przykład:

Miarę kątów zapisujemy następująco:

- 180 stopni,

- 52 stopnie i 10 minut,

- 450 stopni i 0 minut.

Przykład:

Określenie 1% : czytamy 1 procent danej wielkości to jej:

$\frac{1}{100}$ część.

10 % liczby 100, obliczamy następująco:

$$10\ \% \cdot 100 = \frac{1}{10} \cdot 100 = 10$$

$p\%$ liczby a równa się:

$$\frac{p}{100} \cdot a$$

W określeniu procentu został użyty powszechnie stosowany symbol , natomiast w obliczeniach procentów symbol skrócony

Przykład:

Równość 1‰ = 0,1% czytamy:

1 promil jest równy jednej dziesiątej części procenta.

1% liczby p obliczamy następująco:

$$1‰ \cdot p = 0{,}001 \cdot p = \frac{p}{1000}$$

W stopniach mierzymy zarówno temperaturę jak i kąty figur geometrycznych. Obie te jednostki zapisujemy identycznie.

<u>Przykład:</u>

Równość $\sin 30° = \frac{1}{2}$ jest jednym z podstawowych równań trygonometrycznych. Suma kątów w dowolnym czworokącie wypukłym jest równa $360°$

Natomiast suma w dowolnym wielokącie wypukłym wyraża się wzorem: $(n-2)\cdot 180°$ gdzie n jest liczbą kątów tego wielokąta.

<u>Przykład:</u>

Temperatura zera bezwzględnego wynosi:

0˚ K = -273,15˚C = -459,67˚F,

$1˚F = \frac{5}{9}˚C,$

1˚C = 32˚F,

100˚C = 212˚F,

x˚C = x + 273,15˚K

Przykład:

Wiadomo, że minuta kątowa jest $\frac{1}{60}$ stopnia, co zapisujemy:

$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$

W powyższym przykładzie konieczne było zastosowanie drugiego oznaczenia stopnia i minuty, bo gdybyśmy użyli oznaczenia to zamiast 1° , otrzymalibyśmy ułamek: $\frac{1}{600}$.

Wielkość kątów możemy mierzyć nie tylko w stopniach, ale również w radianach, które oznaczamy

Przykład:

Radian jest miarą łukową kąta i wyraża się wzorem:

$$1\,\mathrm{rad} = \frac{180}{\pi} = 57^{\circ}17'44{,}8''$$

8. Oznaczenia liter

8.1 Oznaczenia alfabetu

W tekście matematycznym posługujemy się trzema alfabetami: łacińskim, greckim i gotyckim. Pierwsze oznaczenie alfabetu w tabeli dotyczy małych liter, a drugie dużych.

[Tabela 4.1]

1. łaciński: małe litery - ⠠ ⠿ , duże litery: ⠨ ⠿
2. grecki: małe litery - ⠰ ⠿ , duże litery: ⠸ ⠿
3. gotycki: małe litery - ⠐ ⠿ , duże litery: ⠘ ⠿

Warto zwrócić uwagę dla ułatwienia nauki na to, że oznaczenie dużej litery w każdym z trzech powyższych alfabetów różni się od oznaczenia małej litery dodatkowym czwartym punktem.

8.2 Oznaczenia rodzajów druku

Oznaczenie druku umieszczamy bezpośrednio przed znakiem, którego ono dotyczy, to znaczy przed oznaczeniem alfabetu. W wersjach notacji Ephesera z roku 1955 i 1986 występuje jedynie sześć rodzajów druku. Ich brajlowskie oznaczenie oparto na punktach prawej kolumny sześciopunktu:
(4,5,6) - ⠸ ⠿

W praktyce używa się większej liczby rodzajów druku. W rozszerzeniu brajlowskiej notacji z roku 2000 zostały uwzględnione rodzaje druku wykorzystywane przez System Tex. Poniżej przedstawiamy jedynie podstawowe rodzaje druku, które zaprojektował sam profesor Epheser. Inne są zamieszczone w rozszerzonej notacji matematycznej dla niewidomych.

[Tabela 4.2.1]

1. antykwa ⠰⠿
2. *pochyła antykwa* ⠸⠿
3. **pogrubiona antykwa** ⠨⠿
4. *pismo odręczne* ⠘⠿
5. ornament 1 ⠠⠿
6. ornament 2 ⠐⠿

Powyższe oznaczenia podstawowych rodzajów druku pokrywają się z oznaczeniami małych lub dużych liter alfabetu: łacińskiego, greckiego lub gotyckiego. Nie prowadzi to do nieporozumień. Rodzaj alfabetu sygnalizuje znak stojący bezpośrednio przed literą, a rodzaj druku stoi na lewo od niego. Przyjęto zasadę, iż przed literami nie może stać jedynie oznaczenie druku. Ono samo może być pominięte, gdy jednak występuje, musi sąsiadować z prawej strony z oznaczeniem alfabetu.

<u>Przykład:</u>

⠨⠝ - to duże "N",
⠨⠨⠝ - to pogrubione duże "**N**",
⠸⠨⠝ - to duże pochyłe "*N*",
⠸⠠⠝ - to małe, pochyłe "*n*".

<u>Przykład:</u>

⠨⠨⠝ - zbiór liczb naturalnych,
⠨⠨⠵ - zbiór liczb całkowitych,
⠨⠨⠺ - zbiór liczb wymiernych,

⠨⠨⠟ - zbiór liczb wymiernych,

⠨⠨⠗ - zbiór liczb rzeczywistych,

⠨⠨⠉ - zbiór liczb zespolonych.

W podręcznikach matematycznych zbiór liczb wymiernych jest oznaczany ⠨⠨⠟, natomiast w podręcznikach szkolnych oznacza się go ⠨⠨⠺.

Sześć rodzajów druku to za mało. W najnowszej notacji zaproponowano wzbogacone rozwiązanie. Profesor Epheser zaznacza rodzaje druku punktami prawej kolumny sześciopunktu. Dla wzbogacenia zbioru rodzajów druku najnowsza notacja rozwija tę koncepcję. Rodzaje druku ponumerowano. Ich nazwy nie są dla uczniów zrozumiałe i przydatne.

Dla druku o numerze nr stawiamy najpierw całą prawą kolumnę sześciopunktu - (4,5,6), następnie pomocniczy znak służący do oznaczania dolnych indeksów - (1,6) i numer rodzaju druku zapisany obniżonymi brajlowskimi cyframi. Kończymy oznaczenie pionową kolumną sześciopunktu - (4,5,6). Otwierająca i zamykająca oznaczenie pionowa pałka stanowi nawias, w którym zostało ono zamknięte.

<u>Przykład:</u>

Rodzaj pierwszy druku:
(4,5,6), (1,6), (2), (4,5,6) - ⠸⠡⠂⠸

Dla popularniejszych rodzajów druku notacja proponuje prostsze do zapamiętania i odczytania rozwiązanie. Polega ono na zastąpieniu numerów rodzajów druku ich literowymi oznaczeniami.

[Tabela 4.2]

1. antykwa	⠸⠡⠁⠸
2. *pochyła antykwa*	⠸⠡⠅⠸
3. **pogrubiona antykwa**	⠸⠡⠏⠸

4. *italiki (kursywa)* ⠸⠡⠊⠸
5. KAPITALIKI ⠸⠡⠇⠸
6. ***pogrubione matematyczne italiki*** ⠸⠡⠍⠸
7. *DUŻE KALIGRAFOWANE LITERY ALFABETU ŁACIŃSKIEGO* ⠸⠡⠙⠸
8. ***DUŻE POGRUBIONE KALIGRAFOWANE LITERY ALFABETU ŁACIŃSKIEGO*** ⠸⠡⠛⠸

Podstawowym rodzajem druku służącym do składania wyrażeń matematycznych jest druk zwany italikami matematycznymi (kursywą matematyczną). W celu uproszczenia zapisu brajlowskiego przyjęto w notacji, że jeżeli wyrażenie matematyczne zostało zapisane tylko takim krojem druku, to pomiędzy znakami przejścia od tekstu zwykłego do matematycznego ⠐⠂ i od tekstu matematycznego do zwykłego ⠠⠄ można w ogóle pominąć oznaczenie rodzaju druku.

Dla wyrażeń matematycznych, które zostały złożone innym rodzajem druku niż italiki matematyczne lub zostały złożone przy użyciu kilku krojów druku, zaproponowano stosowanie upraszczających konwencji:

Zapisując wyrażenie matematyczne (pojedynczą literę) następującymi rodzajami druku:

1. pogrubionymi matematycznymi italikami,
2. dużymi kaligrafowanymi literami alfabetu łacińskiego,
3. dużymi pogrubionymi kaligrafowanymi literami alfabetu łacińskiego,
4. literami greckimi,
5. literami gotyckimi,
6. literami ozdobnymi,

można pominąć znaki przejścia od tekstu zwykłego do matematycznego i odwrotnie. Tak więc uznano, że wskazane rodzaje druku służą wyłącznie do zapisu wyrażeń matematycznych. Jest to bardzo znaczące uproszczenie, gdyż najczęściej właśnie z takimi sytuacjami się spotykamy w matematycznym tekście. Gdy spotkamy któryś z wymienionych druków, od razu możemy mieć pewność, że czytamy wyrażenie matematyczne, a nie zwykły tekst.

Nie koniec na tym. Dzięki kolejnemu uproszczeniu mamy pewność, że elementy wyrażenia pomiędzy dwukrotnie powtórzonymi znakami przejścia odpowiednio od tekstu zwykłego do matematycznego i od tekstu matematycznego do zwykłego, są zapisane w następujący sposób:

- litery występujące na poziomie podstawowym (w rzędzie zerowym) są zapisane pogrubionymi matematycznymi italikami,
- wszystkie symbole matematyczne znajdujące się również na poziomie podstawowym są pogrubione,
- litery występujące na poziomie dolnych lub górnych indeksów oraz bezpośrednio nad lub pod symbolami matematycznymi są zapisane matematycznymi italikami,
- liczby znajdujące się na wskazanych poziomach oraz na poziomie podstawowym, pozostają niepogrubione.

Litery greckie, gotyckie, ozdobne oraz duże kaligrafowane (pogrubione) alfabetu łacińskiego uważamy za symbole matematyczne.

Tak więc mamy do dyspozycji metodę, dzięki której w wyrażeniach matematycznych, w których nie występują niestandardowe kroje druku wymienione powyżej, nie musimy tych krojów w brajlu zaznaczać. Wpisanie przed wyrażeniem podwójnego oznaczenia przejścia do tekstu matematycznego i stosowne zamknięcie takiego wyrażenia zastępuje oznaczenia kroju druku wszystkich elementów tego wyrażenia.

<u>Przykład:</u>

Z fizyki znamy dwa proste pojęcia: gęstość ciała oraz jego ciężar właściwy. Tradycyjnie oznacza się je greckimi literami odpowiednio: ρ ⠰⠗ i γ ⠰⠛. Pomiędzy tymi pojęciami zachodzi zależność:

$\gamma = \rho \cdot g$ ⠐⠂⠰⠛ ⠶⠰⠗⠠⠛⠠⠄

gdzie g oznacza przyspieszenie grawitacyjne Ziemi.

Przykład:

Przypuśćmy, że w pewnym obszarze przestrzeni, na punkt materialny o masie *m* działają następujące siły: $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, …,$\mathcal{F}_n$

⠐⠂⠸⠡⠛⠸⠨⠋⠡⠂⠠⠂ ⠸⠡⠛⠸⠨⠋⠡⠆⠠⠂ ⠄⠄⠄⠂⠠
⠸⠡⠛⠸⠨⠋⠡⠠⠝⠠⠄

Na mocy drugiego prawa Newtona punkt materialny porusza się z przyspieszeniem a ⠸⠡⠛⠸⠠⠁ spełniającym równanie wektorowe: $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \ldots + \mathcal{F}_n = m a$

⠐⠂⠸⠡⠛⠸⠨⠋⠡⠂ ⠨⠖⠸⠡⠛⠸⠨⠋⠡⠆ ⠨⠖⠄⠄⠄⠠
⠨⠖⠸⠡⠛⠸⠨⠋⠡⠠⠝⠠
⠨⠶⠸⠡⠙⠸⠠⠍⠸⠡⠛⠸⠠⠁⠠⠄

lub krócej:

⠐⠂⠸⠡⠛⠸⠷⠨⠋⠡⠂ ⠖⠨⠋⠡⠆ ⠖⠄⠄⠄ ⠖⠨⠋⠡⠠⠝⠠
⠶⠸⠡⠙⠸⠠⠍⠠⠁⠾ ⠠⠄⠊⠒
⠐⠂⠐⠂⠨⠋⠡⠂ ⠖⠨⠋⠡⠆ ⠖⠄⠄⠄ ⠖⠨⠋⠡⠠⠝⠠
⠶⠸⠡⠙⠸⠠⠍⠠⠁⠠⠄

Oznaczenie liter składa się ze znaków druku i alfabetu. Wszędzie, gdzie nie można pomylić ze sobą dwóch różnych znaków, można pominąć oznaczenie druku. Problem pojawia się wtedy, gdy w jednym tekście spotykamy tę samą literę zastosowaną do oznaczenia dwóch różnych obiektów. Zarówno w czarnym druku, jak i w brajlu musimy wtedy odróżnić je krojem pisma. W innych sytuacjach zaznaczenie rodzaju w czarnym druku nie stwarza żadnego problemu. Oznaczenie to nie zabiera dodatkowego miejsca. Polega jedynie na zastosowaniu odrębnego kształtu znaku. W brajlu jest inaczej. Zaznaczenie druku jest obszerne i mało czytelne. Gdy zatem w tekście nie występują konflikty, oznaczenie druku nie tylko można, ale lepiej pominąć. Oznaczenie litery zredukuje się dzięki temu do oznaczenia alfabetu.

Oznaczenia druku są niezbędne w następujących sytuacjach:

1. gdy jedna litera występuje w wielu znaczeniach,
2. gdy dzięki oznaczeniu druku niektóre symbole są łatwiejsze do rozpoznania, na przykład wektory i macierze, które zapisujemy pogrubionymi matematycznymi italikami oraz tensory, które zapisujemy pismem ozdobnym.
3. litery pisane antykwą, czyli drukiem prostym zwykłym, jak również ciągi takich liter tworzące symbole wyrazowe, a oznaczające pewne skróty, nie wymagają w brajlu wskazania rodzaju druku, gdyż zaznaczone są przy pomocy specjalnych znaków, zwanych kluczami.
4. tekst zwykły jest zazwyczaj pisany antykwą, więc pomijamy w brajlu jego oznaczenie, przyjmując, że dokładnie każdy taki tekst jest pisany antykwą.

Należy stosować się do kolejnych zasad dotyczących oznaczeń druku i alfabetu:

1. każde oznaczenie litery składające się z oznaczenia druku i alfabetu w tekście matematycznym dotyczy pojedynczego znaku, a w tekście zwykłym wszystkich znaków aż do odstępu lub innego oznaczenia tego rodzaju.
2. oznaczenie określające jedynie alfabet dotyczy w tekście matematycznym, jak i zwykłym, wszystkich liter w formule, aż do kolejnego oznaczenia alfabetu.
3. oznaczenie litery musi pojawić się:

a. przed literami odseparowanymi od reszty tekstu,
b. przed pierwszą literą formuły,
c. przed brajlowską literą zbudowaną z czterech górnych punktów, czyli nie zawierającą punktów 3 i 6, gdy następuje bezpośrednio po liczbie napisanej normalnymi cyframi - porównajmy zapisy:
   ⠼⠃⠑⠙ i ⠼⠃⠑⠠⠙ - dwadzieścia pięć *d*
d. przed niektórymi literami, gdy dochodzi do niejednoznaczności, na przykład "o" i "omikron",

e. przed literą, przed którą należy postawić znak ścieśniania (punkt 4),

f. przed literami "eta", "teta" i "chi", gdy występują w formule matematycznej.

9. Oznaczenia ważnych zbiorów

[Tabela 4.3]

1. zbiór liczb naturalnych	⠨⠨⠝
2. zbiór liczb całkowitych	⠨⠨⠵
3. zbiór liczb wymiernych	⠨⠨⠺
	⠨⠨⠟
4. zbiór liczb rzeczywistych	⠨⠨⠗
5. zbiór liczb zespolonych	⠨⠨⠉
6. zbiór kwaternionów	⠨⠨⠓
7. prosta rzutowa	⠨⠨⠏

10. Niekonwencjonalnie wydrukowane w czarnym druku litery

Poniżej przedstawiamy kilka ważniejszych oznaczeń niekonwencjonalnych liter. Cała tabela znajduje się w rozszerzonej notacji matematycznej dla niewidomych.

[Tabela 5]

12. stylizowane "e"	⠈⠑
13. przekreślone stylizowane "e"	⠔⠈⠑
14. lustrzane stylizowane "e"	⠯⠔

15. przekreślone stylizowane "o" ⠯⠕
    oznaczenie polskie ⠔⠨⠕
16. stylizowane "N" ⠯⠁
26. wersja "V" ⠯⠂
27. wersja odwróconego "V" ⠯⠢
28. lustrzane odbicie "E" ⠯⠢
29. odwrócone "A" ⠯⠂

Omówmy powyższe oznaczenia.

Stylizowane "e" - znak 12 - oznacza: {(element) należy do (zbioru), jest elementem (zbioru)}. Zapisujemy go w następujący sposób:

(4), (1,5) - ⠈⠑

Przekreślone stylizowane "e", - znak 13 - oznacza: {(element) nie należy do (zbioru), nie jest elementem (zbioru)} Zapisujemy go:

(3,5), (4), e - ⠔⠈⠑

Lustrzane odbicie stylizowanego "e" - znak 14 - oznacza: {(zbiór) posiada (element)}.

(1,2,3,4,6), (3,5) - ⠯⠔

Przekreślone stylizowane "O" - znak 15 - oznacza: {zbiór pusty},

(1,2,3,4,6), o - ⠯⠕

Jest to nowy znak w notacji. Wcześniej w polskim brajlu używano innego oznaczenia zbioru pustego, a mianowicie:

(3,5), dl., o - ⠔⠨⠕

Stylizowane "N" - znak 16 - to [alef (litera alfabetu hebrajskiego)], która oznacza: {liczba kardynalna oznaczająca w teorii mnogości moc zbioru}.

(1,2,3,4,6), a - ⠯⠁

Wersja "V" - znak 26 - to powiększony haczek, który oznacza: [kwantyfikator egzystencjalny], {istnieje takie, że}. Zapisujemy go w następujący sposób:

(1,2,3,4,6), (2) - ⠯ ⠂

Wersja odwróconego "V" - znak 27 - to powiększony daszek, który oznacza: [kwantyfikator generalny], {dla każdego}. Zapisujemy go:

(1,2,3,4,6), (2,6) - ⠯ ⠢

Lustrzane odbicie "E" - znak 28 - to [kwantyfikator egzystencjalny w anglosaskiej typografii], który oznacza tam: {istnieje takie, że}.

(1,2,3,4,6), (2,6) - ⠯ ⠢

Odwrócone "A" - znak 29 - to [kwantyfikator generalny w anglosaskiej typografii], który oznacza: {dla każdego}.

(1,2,3,4,6), (2) - ⠯ ⠂

Oznaczenia zawarte w omawianej tabeli są modyfikacjami lub stylizacjami liter. Głównym ich wyróżnikiem w brajlowskiej notacji jest punkt (4) dodany przed łacińską literą, z której powstały. I tak np. stylizowane "p" zapisujemy: ⠈⠏ , a ozdobne "R" zapisujemy: ⠈⠨⠗

Przekreślenie czarnodrukowego symbolu w brajlowskiej notacji oznaczane jest znakiem (3,5): ⠔⠿ stojącym przed nim. Np. przekreślone stylizowane "e" zapisujemy: ⠔⠈⠑ i czytamy: element nie należy do zbioru, nie jest elementem zbioru. Przekreślone stylizowane "o" jest oznaczeniem zbioru pustego i w notacji brajlowskiej zapisujemy go: ⠔⠨⠕

Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy: ⠨⠨⠗ , natomiast prostą rzeczywistą jako przestrzeń, na której została określona funkcja, zapisuje się częściej, jako: ⠨⠗ .

<u>Przykład:</u>

Liczba zespolona z ⠠⠵ ma postać:

$z = x + y \cdot i$ ⠐⠂ ⠠⠵⠈⠶⠭⠈⠖⠽⠄⠊⠠⠄

gdzie i jest jednostką urojoną:

$i = \sqrt{-1}$ ⠐⠂ ⠠⠊ ⠶⠩⠤⠼⠁⠠⠂ ⠠⠭⠠⠂ ⠠⠽⠈⠑⠨⠨⠗⠠⠄

Pierwszą z nich nazywamy częścią rzeczywistą i oznaczamy:

$x = \Re(z)$ lub x=Re z

zaś drugą częścią urojoną i oznaczamy:

$y = \Im(z)$ lub y=Im z

<u>Przykład:</u>

Angstrem jest jednostką długości i wyraża się wzorem:

$\text{Å} = 10^{-10}\,\text{m} = 0{,}1\text{nm}$

co czytamy: jeden angsztrem jest równy jednej dziesięciomiliardowej metra, albo jednej dziesiątej nanometra.

<u>Przykład:</u>

Zapis czytamy: "a jest liczbą naturalną" lub: "a należy do zbioru liczb naturalnych". Zapis czytamy: "*x* należy do przedziału domkniętego o końcach"

Przedziały domknięte są oznaczane różnymi nawiasami:

- nawias kwadratowy,

- nawias klamrowy,

- inny zapis nawiasu klamrowego,

- nawias ostrokątny.

Zależy to od inwencji autora.

Przykład:

Zapis ⠐⠂⠠⠁ ⠔⠈⠑⠣⠼⠚⠂ ⠼⠁⠜ ⠠⠄ czytamy: *a* nie należy do przedziału otwartego o końcach ⠐⠂⠼⠚⠠⠂ ⠼⠁⠠⠄

Zapis ⠐⠂⠠⠭ ⠔⠈⠑⠨⠨⠗ ⠠⠄ czytamy: *x* nie należy do zbioru liczb rzeczywistych.

Przed symbolem $\notin$ ⠔⠈⠑ {(element) nie należy do (zbioru), nie jest elementem (zbioru)} konieczne jest wolne miejsce, gdyż zapis:
⠐⠂⠠⠁⠔⠈⠑⠨⠨⠝ ⠠⠄ nie jest jednoznaczny, może przecież oznaczać, że *a* ⠠⠁ jest liczbą naturalną, a nie, że *a*⠠⠁ nie należy do zbioru liczb naturalnych. Znak (3,5) ⠔ rozumiany jako przekreślenie, zaprzeczenie, jest lewostronnie odpychający. Ten sam znak rozumiany jako zaznaczająca gwiazdeczka, jest lewostronnie przyciągający.

Przykład:

Zapis $X \ni a$ ⠐⠂⠨⠭ ⠯⠔⠠⠁ ⠠⠄ oznacza, że zbiór X ⠐⠂⠨⠭ ⠠⠄
posiada element a ⠐⠂⠠⠁ ⠠⠄
Inne zastosowanie symbolu $\ni$ ⠐⠂⠯⠔ ⠠⠄ jest następujące:
Niech $f: R \to R$ ⠐⠂⠠⠋⠒⠨⠗⠒⠂⠨⠗ ⠠⠄ będzie funkcją. Zdanie to możemy zapisać inaczej:

$$R \ni x \to f(x)$$ ⠐⠂⠨⠗ ⠯⠔⠠⠭⠒⠂⠋⠣⠭⠜⠠⠄

Przykład:

Zbiór, który nie zawiera żadnego elementu nazywamy zbiorem pustym i oznaczamy: $\varnothing$ ⠯⠕ . Innym oznaczeniem zbioru pustego jest: ⠔ ⠸⠕ , jednak jest ono typowe wyłącznie dla stosowanej wcześniej notacji w Polsce. W notacji Ephesera takie oznaczenie już nie istnieje.

Przykład:

Wiadomo, że dla każdej liczby naturalnej $n \in N$, $n \geq 1$.

Używając symboli zdanie to zapisujemy następująco:

$$\bigwedge_{n\in N} n \geq 1$$

⠐⠂⠯⠢⠠⠝⠈⠑⠨⠨⠝⠂⠠⠝ ⠕⠶⠼⠁⠠⠄

Ogólnie zapis $\bigwedge_{x\in X} \varphi(x)$ ⠐⠂⠯⠢⠠⠭⠈⠑⠨⠭ ⠰⠋⠣⠭⠜ ⠠⠄ czytamy:

"dla każdego x należącego do zbioru X, zachodzi: $\varphi(x)$ ⠰⠋⠣⠠⠭⠜ "

Przykład:

Zapis $\bigvee_{x\in R} x^2 = 1$ ⠐⠂⠯⠂⠠⠭⠈⠑⠨⠗⠂⠠⠭⠬⠆ ⠶⠼⠁ ⠠⠄ czytamy:

"istnieje liczba rzeczywista x taka, że x do kwadratu równe jest jeden".

Ogólnie zapis: ⠐⠂⠯⠢⠠⠭⠈⠑⠨⠭ ⠰⠋⠣⠭⠜ ⠠⠄ czytamy: "istnieje x należą-ce do zbioru X takie, że zachodzi ⠐⠂⠰⠋ ⠕⠙ ⠠⠭⠠⠄ "

Przykład:

Dla każdej liczby naturalnej, istnieje liczba naturalna większa od niej. Symbolicznie zapisujemy to następująco:

$$\bigwedge_{n\in N} \bigvee_{m\in \mathrm{N}} : m > n$$

⠐⠂⠯⠢⠠⠝⠈⠑⠨⠨⠝⠂⠯⠂⠠⠍⠈⠑⠨⠨⠝⠒⠠⠍ ⠕⠂⠠⠝⠠⠄

Przykład:

Kwantyfikatory są bardzo ważnymi symbolami matematycznymi. Zastosowanie ich pokażemy na przykładzie definicji zbieżności ciągu liczbowego.

Niech $(a_n)_{n\in \mathrm{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Ciąg ten jest zbieżny, jeżeli zachodzi:

$$\bigvee_{a\in \mathrm{R}} : \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{k\in \mathrm{N}} \bigwedge_{n\in \mathrm{N}} \left(n > k \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\right)$$

Powyższą definicję zapisaną symbolicznie czytamy: istnieje takie "a" należące do "N", że dla każdego ε większego od zera istnieje liczba naturalna "k" taka, że dla każdego "n" należącego do "N", z tego, że "n" jest większe od "k", wynika, że wartość bezwzględna "a" z indeksem "n" minus "a" jest mniejsze od ε .

Przykład:

Funkcja $f : R \to R$ jest ciągła w punkcie x_0 gdy:

$$\bigwedge_{\varepsilon} \bigvee_{\delta} : \bigwedge_{x\in \mathrm{R}} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

W czarnym druku kwantyfikator egzystencjalny [26] i kwantyfikator generalny w anglosaskiej typografii [29] są bardzo podobne, a w notacji brajlowskiej identyczne: (1,2,3,4,6), (2) -

Również kwantyfikator generalny [27] jest bardzo podobny do kwantyfikatora egzystencjalnego w anglosaskiej typografii [28], a w brajlowskiej notacji matematycznej są identyczne: (1,2,3,4,6), (2,6) - ⠯⠢. Może to prowadzić do nieporozumień. Oba typy kwantyfikatorów są nadal stosowane w czarnym druku. Należy jednak w brajlu używać kwantyfikatorów z pozycji [26] i [29] tabeli 5. Gdy zostaną użyte kwantyfikatory z notacji anglosaskiej, należy to zaznaczyć w brajlowskiej uwadze technicznej.

11. Oznaczenia figur geometrycznych

11.1 Symbole geometryczne, które w czarnym druku poprzedzają odpowiadające im nazwy

Poniższe oznaczenia są poprzedzone brajlowskim znakiem (1,2,4,5,6) - ⠻. Znak taki to specjalny klucz. Klucze są charakterystyczne dla poszczególnych grup oznaczeń. Są to specyficzne prefiksy ułatwiające rozpoznanie znaków poprzez natychmiastowe zidentyfikowanie ich przynależności do określonej grupy.

[Tabela 6.1]

trójkąt	⠻⠲
średnica	⠻⠔
okrąg	⠻⠴
kwadrat	⠻⠶
prostokąt	⠻⠿
kąt prosty	⠻⠦
kąt	⠻⠪

Przykład:

Zastosowanie symboli z tabeli 6.1 pokażemy w przykładach wzorów na obliczanie pól figur geometrycznych:

1. Obwód ΔABC ⠻⠲⠨⠁⠃⠉ obliczamy ze wzoru:

$$obw_{\Delta ABC} = \left|\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}\right|$$

⠐⠂ ⠃⠺⠡⠻⠲⠨⠁⠃⠉ ⠶⠈⠸⠨⠒⠨⠁⠃⠸ ⠖⠈⠸⠨⠒⠨⠃⠉⠸⠠
⠖⠈⠸⠨⠒⠨⠉⠁⠸⠠⠄

2. Obwód okręgu o średnicy $\phi = 2r$ ⠻⠔ ⠶⠼⠃⠠⠗ obliczamy ze wzoru:

$$obw_{\circ} = 2\pi r$$

⠐⠂ ⠃⠺⠡⠻⠴ ⠶⠼⠃⠰⠏⠠⠗⠠⠄

3. Obwód kwadratu o boku a ⠠⠁ obliczamy ze wzoru:

$$obw_{\square} = 4 \cdot a$$

⠐⠂ ⠃⠺⠡⠻⠶ ⠶⠼⠙⠠⠁⠠⠄

4. Pole prostokąta o bokach a i b ⠠⠁ i ⠠⠃ obliczamy ze wzoru:

$$P_{\square} = a \cdot b$$

⠐⠂ ⠡⠻⠿ ⠶⠠⠁⠄⠃⠠⠄

5. W trójkącie *ABC:* kąt *ABC* = 60°30’, kąt *ACB* =10°15’

⠐⠂⠻⠲⠨⠁⠃⠉⠂ ⠻⠪⠨⠁⠃⠉ ⠶⠼⠋⠚⠴⠼⠉⠚⠔⠠⠂⠠

⠻⠪⠨⠁⠉⠃ ⠶⠼⠁⠚⠴⠼⠁⠑⠔⠠⠄ ⠠⠄

Obliczyć miarę kąta *CAB* ⠻⠪⠨⠉⠁⠃

Przykład:

W okrąg o średnicy $\phi = 4$ ⠻⠔ ⠶⠼⠙ wpisano trójkąt prostokątny *ΔABC* ⠻⠲⠨⠁⠃⠉ oparty na średnicy. Jeżeli *ΔABC* ⠻⠲⠨⠁⠃⠉ jest równoramienny, to jego pole wyraża się wzorem:

$$P_{\Delta ABC} = 2 \cdot 2 = 4$$

⠐⠂⠨⠏⠡⠻⠲⠨⠁⠃⠉ ⠶⠼⠃⠄⠼⠃ ⠶⠼⠙⠠⠄

Nie wszystkie symbole z tabeli 6.1 są spotykane w czarnym druku. Najczęściej używa się oznaczenia trójkąta ⠻⠲ oraz kąta ⠻⠪. Natomiast symboli: kwadratu ⠻⠶ i prostokąta ⠻⠿ właściwie się nie spotyka. Oznaczenie kąta prostego ⠻⠦ jest stosowane tylko w rysunkach.

11.2 Symbole geometryczne stojące w czarnym druku ponad odpowiadającymi im nazwami

[Tabela 6.2]

1. poziomy odcinek ⠿ ⠨⠒⠿
2. łuk ⠿ ⠨⠣⠿
3. strzałka w prawo ⠿ ⠨⠒⠂⠿
4. strzałka w lewo ⠿ ⠨⠐⠒⠿

Notacja przedstawia wymienione w tabeli oznaczenia dla dwóch punktów "A" i "B".

Przykład:

W ΔABC, bok $\overline{AB}$ ⠻⠲⠨⠁⠃⠉ bok ⠨⠒⠨⠁⠃ ma długość 6 cm ⠼⠋⠻⠉⠍ , bok $\overline{BC}$ 3cm, ⠨⠒⠨⠃⠉ ⠼⠉⠻⠉⠍ zaś kąt $ABC = 60°$ ⠻⠪⠨⠁⠃⠉⠠ ⠶⠼⠋⠚⠴ Obliczyć pole ΔABC ⠻⠲⠨⠁⠃⠉ .

Przykład:

Dane są dwa punkty na okręgu A,B ⠨⠁⠂ ⠨⠃⠄ . Narysować kąt środkowy oparty na łuku AB ⠨⠣⠨⠁⠃

Przykład:

Wektorem nazywamy uporządkowaną parę punktów, z których pierwszy nazywamy początkiem, a drugi końcem wektora. Wektor o końcu w punkcie A i końcu w punkcie B oznaczamy: $\overrightarrow{AB}$ ⠨⠒⠂⠨⠁⠃ Wektor można też oznaczać symbolem $\vec{a}$ ⠨⠒⠂⠠⠁ gdy nie ma potrzeby wskazywania jego początku i końca.

Dla każdego wektora $\overrightarrow{AB}$ ⠨⠒⠂⠨⠁⠃ zachodzi:

$$\overrightarrow{AB} + \overleftarrow{AB} = \vec{0}$$

⠂⠂⠨⠒⠂⠨⠁⠃ ⠨⠖⠨⠐⠒⠨⠁⠃ ⠨⠶⠨⠒⠂⠼⠚⠠⠄

Najczęściej zamiast $\overleftarrow{AB}$ ⠨⠐⠒⠨⠁⠃ piszemy $\overrightarrow{BA}$ ⠨⠒⠂⠨⠃⠁

W wielu podręcznikach szkolnych wydanych brajlem wektor o początku w punkcie A i końcu w punkcie B, był oznaczany ⠨⠒⠂⠨⠁⠃ zamiast ⠨⠒⠂⠨⠁⠨⠃ . Podobnie sumę wektorów oznacza się zwykłym plusem ⠖⠿ zamiast znakiem pogrubionego plusa ⠨⠖⠿

Zapisy: ⠻⠲⠨⠁⠃⠉⠂ ⠨⠒⠨⠁⠃⠂ ⠨⠒⠂⠨⠁⠃⠂ ⠨⠣⠨⠁⠃ oznaczają, że wszystkie litery są duże. Znak dużej litery alfabetu łacińskiego stoi przed pierwszą literą. Stosuje się go, zgodnie z regułami, do następnych liter.

12. Zapis najczęściej spotykanych jednostek fizycznych

Brajlowskie oznaczenia zamieszczone w poniższej tabeli poprzedzone są kluczem (1,2,4,5,6) ⠻ , który nazywamy mianem i jest on nieodzowny. O ile w większości dotychczas omówionych tabel są oznaczenia pochodzące z notacji Ephesera, zarówno z roku 1986, jak i z roku 1955, to w poniższej tabeli jest wiele oznaczeń wprowadzonych w rozszerzeniu notacji z roku 2000.

Znak (1,2,4,5,6) ⠻ zapowiada znaki geometryczne i pełne symbole wyrazowe przedstawione w notacji w tabelach 7 i 8. W stosunku do nich obowiązują następujące zasady:

1. Symbole wyrazowe poprzedzone przez ten znak są przeniesione z czarnego druku. W piśmie punktowym niedopuszczalne są ich skróty literowe. Jednostki fizyczne traktowane są jako tego rodzaju symbole. Możliwy jest ich zapis bez znaku kluczowego, jednak musi on być zastosowany, gdy we wzorze są również jednostki innego rodzaju.
2. Małe litery łacińskie nie wymagają oznaczenia alfabetu, w przeciwieństwie do wszystkich innych liter. Oznaczenie alfabetu, umieszczone przed symbolem wyrazowym, dotyczy wszystkich liter tego symbolu.

<u>Przykład:</u>

ms – milisekunda	⠻⠍⠎
mA – miliamper	⠻⠍⠨⠁
kHz – kiloherc	⠻⠅⠨⠓⠵
MVA – megawoltoamper	⠻⠨⠍⠧⠁

Również złożone dane fizyczne mogą być zapisywane w ten sposób.

Przykład:

$$1\,\mathrm{dyn} = 1\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12} \left[\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} \right]$$

$$1\,\mathrm{gauss} = 1\mathrm{g}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{cm}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

⠐⠂⠼⠁ ⠻⠙⠽⠝ ⠶⠼⠁ ⠻⠛⠄⠉⠍⠄⠎⠬⠤⠼⠃⠠⠂
⠰⠑⠡⠴ ⠶⠼⠓⠂⠓⠑⠙⠃⠄⠼⠁⠚⠬⠤⠼⠁⠃⠻⠆⠨⠁⠎⠳⠨⠧⠍⠠⠂
⠼⠁ ⠻⠛⠁⠥⠎⠎ ⠶⠼⠁⠻⠛⠬⠼⠁⠆⠱⠄⠉⠍⠬⠤⠼⠁⠆⠱⠄⠎⠬⠈
⠈⠤⠼⠁⠠⠄

3. Symbol wyrazowy ze znakiem kluczowym jest traktowany jako całość. Jest obustronnie swobodny.

[Tabela 7.1]

1. amper	⠻⠨⠁
2. angsztrem	⠻⠷
3. ar	⠻⠁
4. hektar	⠻⠓⠁
5. atmosfera fizyczna	⠻⠨⠁⠞⠍
6. atmosfera techniczna	⠻⠁⠞
7. bar	⠻⠃
8. bel	⠻⠨⠃
9. decybel	⠻⠙⠨⠃
10. becquerel	⠻⠨⠃⠟
11. cal	⠻⠊⠝
12. curie	⠻⠉

13. milicurie
14. mikrocurie
15. dioptria
16. dina
17. doba
18. dyna
19. dżul
20. elektronowolt
21. kiloelektronowolt
22. megaelektronowolt
23. farad
24. fon
25. funt
26. gallon
27. godzina
28. gram
29. kilogram
30. dekagram
31. miligram
32. gram siła
33. kilogram siła
34. henr
35. herc
36. jednostka astronomiczna
37. jednostka masy atomowej
38. kaloria
39. wat
40. kilowat
41. kilowatogodzina

42. koń mechaniczny	⠻⠅⠨⠍
43. kulomb	⠻⠨⠉
44. kwintal	⠻⠟
45. litr	⠻⠇
46. lumen	⠻⠇⠍
47. luks	⠻⠇⠭
48. metr	⠻⠍
49. centymetr	⠻⠉⠍
50. decymetr	⠻⠙⠍
51. kilometr	⠻⠅⠍
52. milimetr	⠻⠍⠍
53. mikrometr	⠻⠰⠍⠍
54. metr kwadratowy	⠻⠍⠬⠆
55. metr sześcienny	⠻⠍⠬⠒
56. mila geograficzna	⠻⠍⠊⠇⠄⠛
57. mila morska	⠻⠍⠊⠇⠄⠍
58. minuta	⠻⠍⠊⠝
59. niuton	⠻⠨⠝
60. om	⠻⠸⠺
61. parsek	⠻⠏⠉
62. pascal	⠻⠨⠏⠁
63. puaz	⠻⠨⠏
64. rok świetlny	⠻⠗⠄⠪⠺
65. sekunda	⠻⠎
66. stoks	⠻⠨⠎⠞
67. tesla	⠻⠨⠞
68. tona	⠻⠞
69. tor	⠻⠨⠞⠗
70. uncja	⠻⠕⠵

71. wolt ⠻⠨⠧

72. weber ⠻⠨⠺⠃

73. węzeł ⠻⠺

Oznaczenia zbudowane są z symbolu literowego odpowiadającego notacji czarnodrukowej. W brajlu poprzedzone są kluczem (1,2,4,5,6) ⠻ . Jedyny wyjątek stanowi angsztrem:

kółeczko na szczycie litery "A" - angsztrem,

(1,2,4,5,6), (1,2,3,5,6) - ⠻⠷

<u>Przykład:</u>

Do wody o masie 3 kg. ⠼⠉⠻⠅⠛ i temperaturze 25°C ⠼⠃⠑⠴⠨⠉ wrzucono bryłkę lodu o temperaturze 0°C ⠼⠚⠴⠨⠉ Po stopieniu lodu temperatura wody w naczyniu wynosiła: 10°C ⠼⠁⠚⠴⠨⠉ Oblicz masę bryłki lodu.

Rozwiązanie:

Dane:

$m_1 = 3\text{kg};$

$T_1 = 25°\text{C}; T_0 = 0°\text{C};$

$T_2 = 10°\text{C}$

⠐⠂⠍⠡⠂ ⠶⠼⠉⠻⠅⠛⠠⠆

⠨⠞⠡⠂ ⠶⠼⠃⠑⠴⠨⠉⠠⠆ ⠨⠞⠡⠴ ⠶⠼⠚⠴⠨⠉⠆

⠨⠞⠡⠆ ⠶⠼⠁⠚⠴⠨⠉⠠⠄

Szukane:

$\Delta T = ?$

⠐⠂⠸⠙⠨⠞ ⠶⠠⠢⠠⠄

Lód pobiera ciepło na stopienie. Powstała z lodu woda także:

$$Q_{pl} = c_t \cdot m_2;$$
$$Q_{pw} = c_w \cdot m_2 \cdot \left(T_2 - T_0\right)$$

Woda, do której wrzucono lód oddaje ciepło:

$$Q_{ow} = c_w \cdot m_1 \cdot \left(T_1 - T_2\right)$$

Korzystamy z bilansu cieplnego:

$$Q_p = Q_o$$
$$Q_{pl} + Q_{pw} = Q_{ow}$$
$$c_t \cdot m_2 + c_w \cdot m_2 \cdot \left(T_2 - T_0\right) = c_w \cdot m_1 \cdot \left(T_1 - T_2\right)$$

$$m_2 = \frac{4{,}2\frac{\mathrm{kJ}}{kg}{}^\circ C \cdot 3\mathrm{kg} \cdot \left(25^\circ\mathrm{C} - 10^\circ\mathrm{C}\right)}{\left(340\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} + 4{,}2\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}\right)^\circ\mathrm{C} \cdot \left(10^\circ\mathrm{C} - 0^\circ\mathrm{C}\right)}$$

$$m_2 \approx 0{,}495\mathrm{kJ} \cdot \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kJ}}$$
$$m_2 \approx 0{,}495\mathrm{kg}$$

⠤⠼⠁⠚⠴⠨⠉⠜ ⠳ ⠣⠼⠉⠙⠚⠻⠅⠨⠚⠳⠅⠛ ⠖⠼⠙⠂⠃⠻⠅⠨⠚⠈
⠈⠳⠅⠛⠜⠄⠘⠴⠨⠉ ⠄⠣⠼⠁⠚⠴⠨⠉ ⠤⠼⠚⠴⠨⠉⠜⠰
⠠⠍⠡⠆ ⠢⠢⠼⠚⠂⠙⠊⠑⠻⠅⠨⠚⠄⠅⠛⠳⠅⠨⠚
⠠⠍⠡⠆ ⠢⠢⠼⠚⠂⠙⠊⠑⠻⠅⠛⠠⠄

Odpowiedź:

Bryłka lodu miała masę około 0,495 kg ⠼⠚⠂⠙⠊⠑⠻⠅⠛

<u>Przykład:</u>

O ile zmieni się energia wewnętrzna układu hamulcowego podczas hamowania samochodu o masie m = 800 kg ⠐⠂⠠⠍ ⠶⠼⠓⠚⠚⠻⠅⠛ ⠠⠄ jadącego z prędkością $v = 72\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ⠐⠂⠠⠧ ⠶⠼⠛⠃⠻⠅⠍⠳⠓⠠⠢ ⠠⠄

Rozwiązanie:

Dane:

$m = 800\text{kg}$

$v = 72\frac{\text{km}}{\text{h}}$ $v = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$

⠐⠂⠠⠍ ⠶⠼⠓⠚⠚⠻⠅⠛
⠠⠧ ⠶⠼⠛⠃⠻⠅⠍⠳⠓⠠⠆ ⠠⠧ ⠶⠼⠃⠚⠻⠍⠳⠎⠠⠄

Szukane:

$\Delta U = ?$

⠐⠂⠸⠙⠨⠥ ⠶⠠⠢⠠⠄

Zmiana energii kinetycznej pojazdu podczas hamowania wynosi:

$$\Delta E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Kosztem ubytku energii kinetycznej następuje wzrost energii wewnętrznej układu hamulcowego:

$$\Delta U = \Delta E_k ;\ \Delta U = \frac{mv^2}{2}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$\Delta U = \frac{800\,\mathrm{kg} \cdot \left(20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2}$$

$$\Delta U = 160000\,\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

$$\Delta U = 160000\,\mathrm{J}$$

$$\Delta U = 160\,\mathrm{kJ}$$

Odpowiedź:

Energia wewnętrzna układu hamulcowego wzrośnie o 160 kJ

13. Przedrostki zwiększające i zmniejszające jednostki

Również w tym przypadku przed brajlowskimi oznaczeniami jest niezbędny klucz (1,2,4,5,6) - ⠻ . W tabeli zamieszczone są przedrostki, ich brajlowskie odpowiedniki i wielkości, o które zwiększają, względnie zmniejszają, jednostki fizyczne. Wielkości te wyrażone są w postaci potęg liczby 10.

[Tabela 7.2]

1. hexa	⠼⠁⠚⠬⠂⠦	⠻⠨⠑⠿
2. penta	⠼⠁⠚⠬⠂⠢	⠻⠨⠏⠿
3. tera	⠼⠁⠚⠬⠂⠆	⠻⠨⠞⠿
4. giga	⠼⠁⠚⠬⠔	⠻⠨⠛⠿
5. mega	⠼⠁⠚⠬⠖	⠻⠨⠍⠿
6. kilo	⠼⠁⠚⠬⠒	⠻⠅⠿
7. hekto	⠼⠁⠚⠬⠆	⠻⠓⠿
8. decy	⠼⠁⠚⠬⠤⠼⠁	⠻⠙⠿
9. centy	⠼⠁⠚⠬⠤⠼⠃	⠻⠉⠿
10. mili	⠼⠁⠚⠬⠤⠼⠉	⠻⠍⠿
11. mikro	⠼⠁⠚⠬⠤⠼⠋	⠻⠰⠍⠿
12. nano	⠼⠁⠚⠬⠤⠼⠊	⠻⠝⠿
13. piko	⠼⠁⠚⠬⠤⠼⠁⠃	⠻⠏⠿
14. femto	⠼⠁⠚⠬⠤⠼⠁⠑	⠻⠋⠿
15. atto	⠼⠁⠚⠬⠤⠼⠁⠓	⠻⠓⠿

<u>Przykład:</u>

kg - kilogram ⠻⠅⠛

μb - mikrobar ⠻⠰⠍⠃

MV	- megawolt	⠻⠨⠍⠨⠧
kΩ	- kiloohm	⠻⠅⠸⠺
Ma	- miliamper	⠻⠍⠨⠁
μW	- mikrowat	⠻⠰⠍⠨⠺

14. Symbole wyrazowe przeniesione do systemu brajla z systemu czarnodrukowego w niezmienionej postaci

Brajlowskie oznaczenie symboli poprzedzone są kluczem (1,2,4,5,6) ⠻

[Tabela 8]

1.	wyznacznik	⠻⠙⠑⠞
2.	skończony	⠻⠋⠊⠝
3.	wymiar	⠻⠙⠊⠍
4.	jądro	⠻⠅⠑⠗
5.	kres dolny	⠻⠊⠝⠋
6.	kres górny	⠻⠎⠥⠏
7.	homomorfizm	⠻⠓⠕⠍
8.	prawdopodobieństwo	⠻⠨⠏⠗
9.	stopień	⠻⠙⠑⠛
10.	amplituda	⠻⠁⠍
11.	sinus amplitudy	⠻⠎⠝
12.	cosinus amplitudy	⠻⠉⠝
13.	delta amplitudy	⠻⠙⠝
14.	sinus całkowy	⠻⠎⠊
15.	cosinus całkowy	⠻⠉⠊

16. logarytm całkowy ⠻⠇⠊

17. całka wykładnicza ⠻⠑⠊

18. największy wspólny podzielnik ⠻⠛⠉⠙

<u>Przykład:</u>

Rozwiązać układ równań metodą wyznaczników:

$$\begin{cases} 5x + 4y = -2 \\ 9x + 4y = 6 \end{cases}$$

⠐⠂⠼⠑⠠⠭ ⠖⠼⠙⠠⠽ ⠶⠤⠼⠃ ⠠⠄ i

⠐⠂⠼⠊⠠⠭ ⠖⠼⠙⠠⠽ ⠶⠼⠋⠠⠄

Rozwiązanie:

Obliczamy kolejno: wyznacznik główny układu równań:

$$\det\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 4 \cdot 9 = -16$$

⠐⠂⠻⠙⠑⠞⠣⠼⠑ ⠼⠙⠰⠳⠼⠊ ⠼⠙⠜⠠

⠶⠼⠑⠄⠼⠙ ⠤⠼⠙⠄⠼⠊ ⠶⠤⠼⠁⠋⠠⠄

Następnie wyznaczniki dla zmiennych:

$$W_x = \det\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 - 4 \cdot 6 = -32,$$

$$W_y = \det\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 - (-2 \cdot 9) = 48$$

⠐⠂⠨⠺⠡⠭ ⠶⠻⠙⠑⠞⠣⠤⠼⠃ ⠼⠙⠰⠳⠼⠋ ⠼⠙⠜⠠

⠶⠼⠣⠤⠼⠃⠜⠄⠼⠙ ⠤⠼⠙⠄⠼⠋ ⠶⠤⠼⠉⠃⠠⠂

Skąd otrzymujemy:

$x = -32 / (-16) = 2$

$y = 48 / (-16) = -3$

Przykład:

Kres górny, dolny zbioru Z oznaczamy odpowiednio: sup Z, inf Z

Niech $(a_n)_{n \in N}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych skończonych lub nieskończonych. Stosujemy następujące skrócone oznaczenie:

$$\sup a_n = \sup_n a_n = \sup\{a_n : n = 1,2,...\}$$

Przykład:

Prawdopodobieństwo zdarzenia E może przybierać wartości z przedziału: $[0,1]$ to znaczy:

$$0 \leq \Pr(E) \leq 1$$

Prawdopodobieństwo iloczynu dwóch zdarzeń zależnych E_1 i E_2 wyraża się wzorem:

$$\Pr(E_1)\cdot(E_2)=\Pr(E_1)\cdot\Pr(E_2\mid E_1)=\Pr(E_2)\cdot\Pr(E_1)\cdot\Pr(E_1\mid E_2)$$

<u>Przykład:</u>

Pojęcie największego wspólnego podzielnika jest bardzo często wykorzystywane w matematyce, np. do skracania ułamków. Największym wspólnym podzielnikiem liczb 18 i 12 jest liczba 6. Za pomocą wzoru zapisujemy to następująco:

gcd (18, 12) = 6

15. Skrótowe symbole wyrazowe poprzedzone brajlowskim znakiem liczby (3,4,5,6) - ⠼

Szczególnie często używane symbole wyrazowe nie są wiernie przenoszone z czarnego druku, lecz są dodatkowo skracane. Zaczynają się one kluczami (3,4,5,6) ⠼ lub (1,2,4,6) ⠫ , po których następuje pojedyncza litera kluczowa, czasem wzbogacona o dodatkową literę. Symbole takie są traktowane jako całość. Są one obustronnie swobodne i nie unieważniają działania ostatniego oznaczenia liter.

[Tabela 9]

1. stała
2. granica

3. granica dolna

4. granica górna

5. minimum

6. maksimum

7. moduł

8. modulo

9. radialny

10. signum

Przykład:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ taki zapis czytamy: "granicą ciągu jeden przez n przy n dążącym do nieskończoności jest 0".

Można to zapisać nieco dłużej, analogicznie jak w czarnym druku:

Przykład:

$\left((-1)^n\right)_{n\in N}$ nie posiada granicy, ale ma granicę dolną i górną równe odpowiednio:

$$\liminf_{n\to\infty}(-1)^n=-1$$

$$\limsup_{n\to\infty}(-1)^n=1$$

Granice te można również zapisać:

Chociaż oba zapisy granic (z kluczem i kluczem) są poprawne, to należy stosować zapisy skrócone: , ,
W tabeli 17 są podane jeszcze inne oznaczenia granicy dolnej i granicy górnej

Przykład:

Zapis czytamy: "minimum z liczb 3, 5, 1 jest liczbą 1".

Maksimum oznaczamy symbolem . Łatwo sprawdzić, że:

$$\max\{x \in R : x^2 \leq 1\} = 1$$

Jeśli zapomnieliśmy brajlowskich skrótowych symboli, to można użyć oznaczeń czarnodrukowych poprzedzonych kluczem .

Przykład:

Dzielenie modulo $k, k \in \mathrm{N}$ jest działaniem, którego wynikiem jest reszta z dzielenia $n : k,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Np.:

$$5 \bmod 3 = 2,\ 10 \bmod 3 = 1,$$
$$21 \bmod 6 = 3,\ 11 \bmod 6 = 5.$$

Przykład:

Signum przyporządkowuje wyrażeniu jego znak, czyli:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & dla\, x < 0 \\ 0 & dla\, x = 0 \\ 1 & dla\, x > 0 \end{cases}$$

⠐⠂⠼⠎⠠⠭ ⠶⠣⠄⠤⠼⠁ ⠠⠄⠙⠇⠁ ⠐⠂⠠⠭ ⠪⠄⠼⠚⠠
⠰⠳⠼⠚ ⠠⠄⠙⠇⠁ ⠐⠂⠠⠭ ⠶⠼⠚⠠
⠰⠳⠼⠁ ⠠⠄⠙⠇⠁ ⠐⠂⠭ ⠕⠂⠼⠚⠠⠜⠠⠄

16. Skrótowe symbole wyrazowe poprzedzone brajlowskim kluczem (1,2,4,6) ⠫

16.1 Funkcja wykładnicza, logarytmy

[Tabela 10.1]

1. funkcja wykładnicza ⠫⠑
2. logarytm ⠫⠇
3. logarytm naturalny ⠫⠦⠇
4. logarytm podwójny ⠫⠲⠇
5. antylogarytm ⠫⠂⠇
6. cologarytm ⠫⠒⠇
7. numer ⠫⠝
8. argument ⠫⠷

Podstawę a logarytmu zapisujemy jako przedni górny przedrostek: $\log_a x$ ⠌⠠⠁⠱⠫⠇⠭ . Podstawę logarytmu będącą liczbą naturalną zapisujemy obniżonymi cyframi: $\log_3 x$ ⠌⠒⠫⠇⠭. W logarytmach dziesiętnych pomijamy podstawę: $\lg x$ ⠫⠇⠭

Wyrażenie e^x ⠠⠑⠬⠭ gdzie e jest podstawą logarytmów naturalnych oznacza się: $\exp x$ ⠑⠭⠏⠠⠭ (od łacińskiego exponens - wykładnik). W brajlowskiej notacji matematycznej ⠑⠭⠏⠠⠭ oznaczamy ⠫⠑⠠⠭

Przykład:

Logarytmem liczby dodatniej x przy danej podstawie $a > 0, a \neq 1$ ⠐⠂⠠⠁ ⠕⠂⠼⠚⠠⠂ ⠠⠁ ⠔⠶⠼⠁ ⠠⠄ nazywamy wykładnik potęgi *b,* do której trzeba podnieść podstawę *a.* Piszemy:

$b = \log_a x$, jeżeli $a^b = x$

⠐⠂⠠⠃ ⠶⠌⠠⠁⠱⠫⠇⠭⠂ ⠠⠄⠚⠑⠯⠑⠇⠊ ⠐⠂⠠⠁⠬⠃ ⠶⠭⠠⠄

Jedną z podstawowych własności logarytmów jest:

$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

⠐⠂⠌⠠⠁⠱⠫⠇⠭⠬⠝ ⠶⠝⠄⠌⠁⠱⠫⠇⠭⠠⠄

Logarytm przy podstawie 10, zapisujemy krótko: lg ⠻⠇⠛⠠⠭, albo jeszcze krócej: ⠫⠇⠭

Podstawę logarytmu w notacji brajlowskiej zapisujemy jako przedni górny przedrostek, chociaż w zapisie czarnodrukowym znajduje się ona w miejscu tylnego dolnego indeksu.

Przykład:

Logarytm przy podstawie *e* oznaczamy $\ln x$ ⠫⠦⠇⠭ lub ⠻⠇⠝⠭ i nazywamy logarytmem naturalnym z x.

Przykład:

Liczba *y,* której logarytm dziesiętny jest równy *x,* nazywa się antylogarytmem. Piszemy: $\operatorname{anti}\log x = y$, jeżeli $\log y = x$

⠐⠂⠫⠂⠇⠠⠭ ⠶⠽⠂ ⠠⠄⠚⠑⠯⠑⠇⠊ ⠐⠂⠫⠇⠠⠽ ⠶⠭

albo dłużej, odwzorowując zapis czarnodrukowy:

⠐⠂⠻⠁⠝⠞⠽⠇⠕⠛⠠⠭ ⠶⠽⠠⠂ ⠠⠄⠚⠑⠯⠑⠇⠊
⠐⠂⠻⠇⠛⠠⠽ ⠶⠭⠠⠄

16.2 Funkcje trygonometryczne i ich odwrotności

[Tabela 10.2]

1. arcus ⠫⠁
2. sinus ⠫⠎
3. cosinus ⠫⠉
4. tangens ⠫⠞
5. cotangens ⠫⠳
6. secans ⠫⠤
7. cosecans ⠫⠣
8. arcus sinus ⠫⠂⠎
9. arcus cosinus ⠫⠂⠉

10. arcus tangens ⠫⠂⠞
11. arcus cotangens ⠫⠂⠳
12. arcus secans ⠫⠂⠤
13. arcus cosecans ⠫⠂⠣

Przykład:

Niech będzie dany trójkąt ΔABC ⠻⠲⠨⠁⠃⠉ gdzie kąt C równa się 90° ⠻⠪⠨⠉ ⠶⠼⠊⠚⠴ Wówczas:

$\sin A = a / c$
$\cos A = b / c$
i
$\sin B = b / c$
$\cos B = a / c$

⠐⠂⠫⠎⠨⠁ ⠶⠈⠸⠠⠁⠸ ⠲⠈⠸⠠⠉⠸⠠⠂
⠫⠉⠨⠁ ⠶⠈⠸⠠⠃⠸ ⠲⠈⠸⠠⠉⠸ ⠠⠄⠊
⠐⠂⠫⠎⠨⠃ ⠶⠈⠸⠠⠃⠸ ⠲⠈⠸⠠⠉⠸⠠⠂
⠫⠉⠨⠃ ⠶⠈⠸⠠⠁⠸ ⠲⠈⠸⠠⠉⠸⠠⠄

gdzie: A ⠨⠁ jest kątem leżącym na przeciw boku a ⠠⠁⠠⠂ ⠨⠃ i B kątem leżącym na przeciw boku b, ⠠⠃⠠⠂ ⠨⠉ C kątem leżącym na przeciw boku c ⠠⠉⠠⠆ natomiast a, b, c ⠈⠸⠠⠁⠸⠠⠂ ⠈⠸⠠⠃⠸⠠⠂ ⠈⠸⠠⠉⠸ są długościami boków trójkąta.

Przykład:

Jest wiele wzorów na obliczanie pola trójkąta. Jeden z nich ma następującą postać:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{bc \cdot \sin A}{2}$$

gdzie A jest kątem leżącym między bokami a i b

Przykład:

Znając wartości funkcji sinus i cosinus w punktach a i b, można podać wartość funkcji sinus w punkcie $a+b$ Zachodzi równość:

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

Przykład:

Dla zilustrowania zapisu funkcji trygonometrycznych podanych zostanie kilka wzorów:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$
$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha},$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Przykład:

Dla dowolnego trójkąta ΔABC ⠻⠲⠨⠁⠃⠉ zachodzi równość:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

⠐⠂⠠⠁⠬⠆ ⠶⠠⠃⠬⠆ ⠖⠠⠉⠬⠆ ⠤⠼⠃⠠⠃⠉⠄⠫⠉⠨⠁⠠⠄

gdzie kąt A ⠻⠪⠨⠁ leży na przeciwko boku a ⠠⠁ .

Zamiast takiej symboliki można używać zapisu zgodnego z zapisem czarnodrukowym, z kluczem ⠻ . Nie jest on zalecany.

Funkcje trygonometryczne w podręcznikach czarnodrukowych są zapisywane zwykłym drukiem.

Przykład:

Funkcje cyklometryczne są to funkcje odwrotne względem funkcji trygonometrycznych. Piszemy:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

⠐⠂⠠⠽ ⠶⠫⠂⠎⠠⠭ ⠐⠶⠂⠠⠭ ⠶⠫⠎⠠⠽⠠⠄

funkcję po lewej stronie równoważności nazywamy arcus sinus:

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

⠐⠂⠠⠽ ⠶⠫⠂⠉⠠⠭ ⠐⠶⠂⠠⠭ ⠶⠫⠉⠠⠽⠠⠄

funkcję po lewej stronie równoważności nazywamy arcus cosinus.

Analogicznie określamy arcus tangens, który oznaczamy ⠫⠂⠞ i arcus cotangens, który oznaczamy ⠫⠂⠳ .

17. Symbole arbitralne poprzedzone kluczem (1,2,3,4,6) ⠯

Tabela zawiera znaki, które nie są ani symbolami wyrazowymi, ani obrazowym przedstawieniem obiektów geometrycznych. Używany jest dla poniższych symboli znak kluczowy (1,2,3,4,6) ⠯ , po którym następuje odpowiednia litera lub oznaczenie brajlowskie. Symbole te są obustronnie swobodne. Nie unieważniają działania oznaczenia litery. Lista symboli arbitralnych może być wydłużana w miarę potrzeb.

[Tabela 11]

1.	laplasjan	⠯⠙ ⠸⠙
2.	nabla	⠯⠝
3.	dalambercjan	⠯⠟
4.	alef	⠯⠁
5.	zbiór pusty	⠯⠕
6.	(zbiór) posiada element	⠯⠔
7.	kwantyfikator generalny	⠯⠢
8.	kwantyfikator generalny (anglosaski)	⠯⠂
9.	kwantyfikator egzystencjalny	⠯⠂
10.	kwantyfikator egzystencjalny (anglosaski)	⠯⠢
11.	suma zbiorów	⠯⠩
12.	powiększona suma zbiorów	⠯⠨⠩
13.	suma zbiorów z plusem	⠯⠖⠩
14.	powiększona suma zbiorów z plusem	⠯⠖⠨⠩
15.	iloczyn zbiorów	⠯⠬
16.	powiększony iloczyn zbiorów	⠯⠨⠬
17.	suma	⠯⠎
18.	iloczyn, produkt	⠯⠏
19.	kres górny, suma zbiorów	⠯⠩⠒

20. kres dolny, iloczyn zbiorów ⠯⠬⠒
21. nadanie nazwy formule ⠯⠒
22. brajlowska uwaga techniczna ⠯⠯

Dla uniknięcia dwuznaczności w przypadku znaków: ⠸⠎ i ⠸⠏ mogących oznaczać zarówno greckie litery, jak sumę i produkt, wprowadzono przedstawione tu odrębne brajlowskie oznaczenia dla sumy i produktu: ⠯⠎ i ⠯⠏ .

<u>Przykład:</u>

Alefem nazywamy moc zbioru dobrze uporządkowanego. Przez alef zero $\aleph_0$ ⠯⠁⠡⠴ oznaczamy moc zbioru przeliczalnego. Bezpośrednio po $\aleph_0$ ⠯⠁⠡⠴ następuje $\aleph_1$ ⠯⠁⠡⠂ .

<u>Przykład:</u>

Niech będą dane dwa zbiory A ⠨⠁ i B ⠨⠃ . Łatwo zauważyć, że zachodzi:

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B$$
i
$$A \cap B \subset B \subset A \cup B$$

⠐⠂⠨⠁ ⠯⠬⠨⠃ ⠣⠄⠨⠁ ⠣⠄⠨⠁ ⠯⠩⠨⠃ ⠠⠄⠊
⠐⠂⠨⠁ ⠯⠬⠨⠃ ⠣⠄⠨⠃ ⠣⠄⠨⠁ ⠯⠩⠨⠃ ⠠⠄

<u>Przykład:</u>

Dla dowolnych zbiorów A ⠨⠁ , B ⠨⠃ zachodzi:

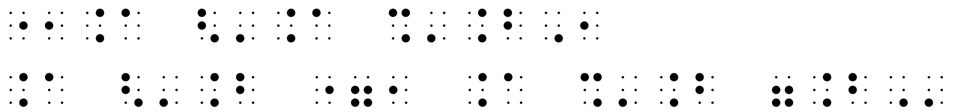
$$A \subset B \Leftrightarrow \bigwedge_{a \in A} a \in B$$

⠐⠂⠨⠁ ⠣⠄⠨⠃ ⠐⠶⠂ ⠯⠢⠠⠁⠈⠑⠨⠁ ⠠⠁⠈⠑⠨⠃⠠⠄

<u>Przykład:</u>

Dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi:

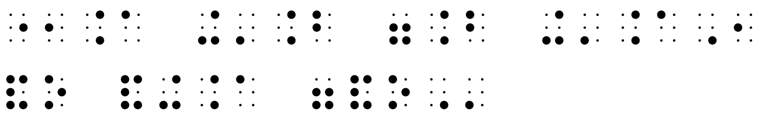
$$A \subset A \cup B,$$
$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$$



<u>Przykład:</u>

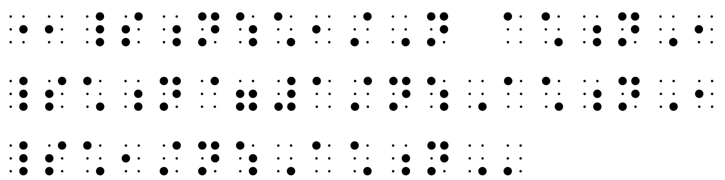
Dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi:

$$A \cap B = B \cap A,$$
$$\varnothing \cap A = \varnothing.$$



Sumę (iloczyn) możemy zapisywać na kilka sposobów:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$



Pierwszy zapis jest propozycją Ephesera. Natomiast drugi jest wiernym odwzorowaniem zapisu czarnodrukowego, zaś trzeci jego skróconą wersją. Nam bardziej odpowiada zapis drugi lub trzeci.

18. Operacje i relacje

W brajlowskiej notacji matematycznej tabele 12.1 i 12.2 zawierają brajlowskie oznaczenia odpowiadające czarnodrukowym symbolom operacji i relacji. Niektóre z tych symboli używane są w wielu znaczeniach. Nie wszystkie z nich mogły zostać tu wyliczone. W wyborze symbolu brajlowskiego należy kierować się symbolem czarnodrukowym.

Niektóre znaki czarnodrukowe z tabeli 12.2 składają się z prostszych elementów, umieszczonych jeden nad drugim. W zapisie brajlowskim element wyższy umieszczamy przed niższym. Oto kilka przykładowych znaków:

nie jest równy (3,5), (2,3,5,6): ⠯ ⠔ ⠶
nie przystaje (3,5), (2,3,5,6), (2,3,5,6): ⠯ ⠔ ⠶ ⠶
mniejsze lub równe (2,4,6), (2,3,5,6): ⠯ ⠪ ⠶

Przekreślenie oznaczane w czarnym druku poprzeczną kreską to zaprzeczenie. W brajlu oznaczamy go poprzez umieszczenie na początku symbolu znaku (3,5) ⠔

W literaturze matematycznej można znaleźć różne warianty symboli operacji i relacji, które powstają poprzez umieszczenie nad nimi kropki, poprzez stylizację lub modyfikację. W tych przypadkach zaleca się stosowanie konstrukcji znakowych takich, jak:

1. oznaczenie równości z przecinkiem na górze,
   sz., o., (2), (2,3,5,6), sz - ⠿ ⠀ ⠂ ⠶ ⠿

2. oznaczenie równości z kropką na górze,
   sz., o., (2,3,5,6), (3), sz - ⠿ ⠀ ⠶ ⠄ ⠿

3. znak plusa z przecinkiem nad nim,
   sz., o., (2), (2,3,5), sz - ⠿ ⠀ ⠂ ⠖ ⠿

4. znak plusa z przecinkiem na górze,

sz., o., (2,3,5), (2), sz - ⠿ ⠖⠂⠿

5. znak plusa z kropką na górze,

sz., o., (2,3,5), (3), sz - ⠿ ⠖⠄⠿

Takie oznaczenia wymagają wyjaśnienia, na przykład w brajlowskiej uwadze technicznej, albo w treści odnośnika.

Znaki zakończenia ułamka i silni:

(5,6) - ⠿ ⠰ ⠿
(1,2,4,6) - ⠿ ⠫ ⠿

są prawostronnie odpychające. Przed znakami operacji i relacji należy, ze względu na sąsiednie znaki, wypełnić miejsca puste punktem 4, który stosowany jest jako "wypełniacz luk".

18.1 Znaki operacji

[Tabela 12.1]

1.	plus	⠿ ⠖⠿
2.	pogrubiony plus	⠿ ⠨⠖⠿
3.	minus	⠿ ⠤⠿
4.	pogrubiony minus	⠿ ⠨⠤⠿
5.	plus minus	⠿ ⠖⠤⠿
6.	minus plus	⠿ ⠤⠖⠿

7. centralna kropka	⠄ ⠿
8. pogrubiona centralna kropka	⠨ ⠄ ⠿
9. krzyżyk	⠿ ⠦ ⠿
10. pogrubiony krzyżyk	⠿ ⠨ ⠦ ⠿
11. powiększony krzyżyk	⠿ ⠨ ⠨ ⠦ ⠿
12. dwukropek (dzielenie)	⠿ ⠲ ⠿
13. dwukropek z minusem (dzielenie)	⠿ ⠲ ⠤ ⠿
14. kółko	⠿ ⠴ ⠿
15. pogrubione kółko	⠿ ⠨ ⠴ ⠿
16. kółko z kropką w środku	⠿ ⠴ ⠄ ⠿
17. powiększone kółko z kropką w środku	⠿ ⠨ ⠴ ⠄ ⠿
18. kółko z plusem w środku	⠿ ⠴ ⠖ ⠿
19. powiększone kółko z plusem w środku	⠿ ⠨ ⠴ ⠖ ⠿
20. kółko z minusem w środku	⠿ ⠴ ⠤ ⠿
21. powiększone kółko z minusem w środku	⠿ ⠨ ⠴ ⠤ ⠿
22. kółko z krzyżykiem w środku	⠿ ⠴ ⠦ ⠿
23. powiększone kółko z krzyżykiem w środku	⠿ ⠨ ⠴ ⠦ ⠿
24. kółko z ukośnikiem w środku	⠿ ⠴ ⠳ ⠿
25. kółko z gwiazdką w środku	⠿ ⠴ ⠸ ⠲ ⠿
26. powiększone kółko z gwiazdką w środku	⠿ ⠨ ⠴ ⠸ ⠲ ⠿
27. gwiazdka	⠿ ⠨ ⠲ ⠿
28. pięcioramienna gwiazdka	⠿ ⠈ ⠸ ⠲ ⠿
29. kreska ułamkowa	⠳ ⠐ ⠳
30. początek ułamka	⠿ ⠆ ⠿
31. koniec ułamka	⠿ ⠰ ⠿
32. silnia	⠿ ⠫ ⠿
33. logiczna alternatywa	⠿ ⠩ ⠂ ⠿
34. logiczna koniunkcja	⠿ ⠬ ⠂ ⠿
35. logiczna negacja	⠿ ⠒ ⠔

36. suma zbiorów ⠯⠩
37. iloczyn zbiorów ⠯⠬
38. różnica zbiorów ⠿ ⠡⠄⠿
39. różnica symetryczna zbiorów ⠿ ⠌⠄⠿

Warto zwrócić uwagę, że powiększenia i pogrubienia brajlowskich oznaczeń powstają przez zapisanie dodatkowego znaku dużej litery (4,6) - ⠨ .

W szczegółowym omówieniu przedstawionych znaków, zawartym w rozdziale 21 w części IV, każda pozycja składa się z trzech informacji:

- opisu kształtu czarnodrukowego symbolu,
- nazwy (jeżeli istnieje),
- jego merytorycznego znaczenia.

Nazwa symbolu umieszczona jest w nawiasie kwadratowym, a znaczenie w nawiasie klamrowym. Po nich następuje objaśnienie oznaczenia brajlowskiego.

Umieszczenie punktu (5) ⠐ bezpośrednio przed znakiem kreski ułamkowej (1,2,5,6) - ⠳ podkreśla pochylenie prostoliniowej kreski.

<u>Przykład:</u>

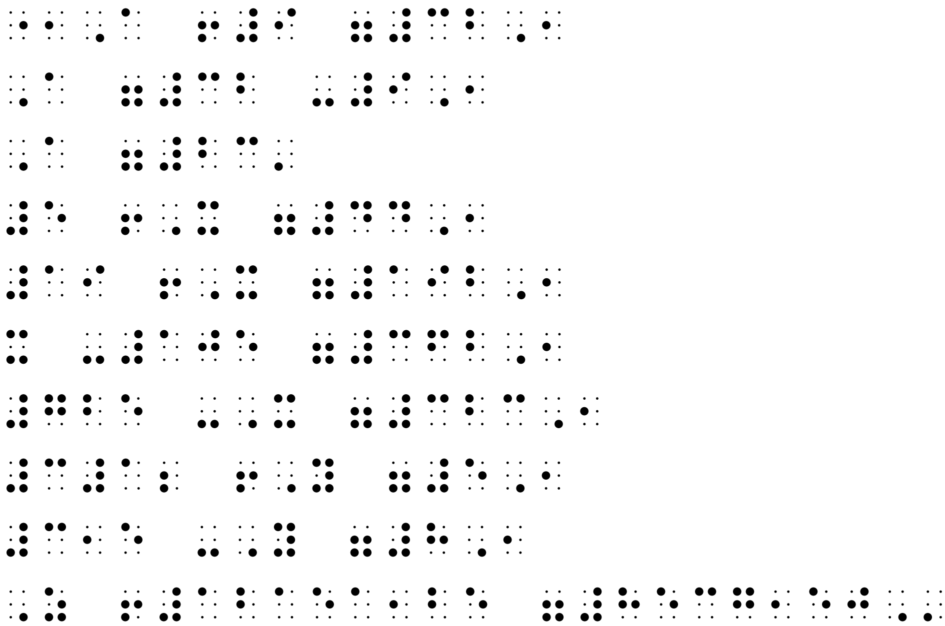
Oblicz poniższe wyrażenia według wzoru:

$a + 9 = 32,$
$a = 32 - 9,$
$a = 23.$

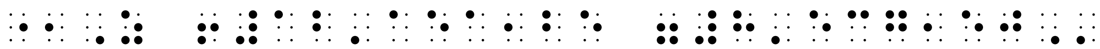
$5 + x = 44,$
$19 + x = 192,$
$x - 105 = 362,$
$725 - x = 323,$

$3\frac{1}{2} + y = 5,$

$3{,}5 - y = 8,$
$z + 12151{,}25 = 8537{,}50$



Dla łatwiejszego odczytania dużych liczb można zastosować kropkę grupującą. Wówczas ostatnie wyrażenie przyjmie postać:



Przykład:

Długość firanek trzeba zmierzyć przed zakupem, gdyż na etykiecie jest napisane: długość $170\,\text{cm} \pm 5\%$  .

Przykład:

Oblicz:

$5 \cdot 133 =,$
$13 \cdot a = 91,$
$12x = 144,$
$c \cdot 24 = 264.$

⠐⠂⠼⠑⠄⠼⠁⠉⠉ ⠶⠠⠂

⠼⠁⠉⠄⠠⠁ ⠶⠼⠊⠁⠠⠂

⠼⠁⠃⠠⠭ ⠶⠼⠁⠙⠙⠠⠂

⠠⠉⠄⠼⠃⠙ ⠶⠼⠃⠋⠙⠠⠄

Analogicznie jak w czarnym druku znak mnożenia możemy pominąć, o ile nie prowadzi to do nieporozumień. Jeżeli w iloczynie pierwszym czynnikiem jest liczba, a drugim litera, która w brajlu mieści się w czterech górnych punktach, to musimy między nimi postawić znak mnożenia.

<u>Przykład:</u>

Dwukropek ⠒ ⠿ jest również w czarnym druku symbolem zwykłego dzielenia.

Np.: 12 : 4 = 3 ⠐⠂⠼⠁⠃ ⠒⠼⠙ ⠶⠼⠉⠠⠄

Dzielenie zapisywane jest więc na wiele sposobów. Pokażemy to na przykładach:

30 : 2 = 15,

156 : 4 = 39,

$100 : 30 = 3\frac{1}{3}$,

⠐⠂⠼⠉⠚ ⠒⠼⠃ ⠶⠼⠁⠑⠠⠂

⠼⠁⠑⠋ ⠲⠼⠙ ⠶⠼⠉⠊⠠⠂

⠼⠁⠚⠚ ⠲⠼⠉⠚ ⠶⠼⠉⠼⠁⠒⠠⠂ ⠠⠄

<u>Przykład:</u>

Dla dowolnych wektorów $\overrightarrow{AB}$ ⠨⠒⠂⠨⠁⠃ i $\overrightarrow{BC}$ ⠨⠒⠂⠨⠃⠉ zachodzi:

$\overrightarrow{AB}+\overleftarrow{AB}=\vec{0}$,

$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$,

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Przykład:

Niech $\boldsymbol{x} = x_1,...,x_n$ i $\boldsymbol{y} = y_1,...,y_n$ będą dowolnymi wektorami przestrzeni $\boldsymbol{R}^n$

Liczbę rzeczywistą $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

nazywamy iloczynem skalarnym wektorów $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ i oznaczamy symbolem $\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{y}$ Zapisujemy to następująco:

$$\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{y} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

gdzie symbol oznacza "równe z definicji."

Przykład:

Kolejnym rodzajem iloczynu jest iloczyn kartezjański.

Iloczyn kartezjański zbiorów *X i Y* i jest zbiorem wszystkich par (*x, y*) takich, że $x \in X$ i $y \in Y$ Symbolicznie zapisujemy to tak:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

Iloczyn kartezjański zapisujemy również $X \times Y$ ⠨⠭⠨⠨⠦⠨⠽ . Zapis ten nie jest jednak często używany. Z kolei symbol iloczynu kartezjańskiego jest podobny do iloczynu wektorowego: ⠨⠦⠿ . Należy uważać, by ich nie mylić.

<u>Przykład:</u>

Dwukropek w brajlowskiej notacji przedstawiany jest jako dwa punkty, podobnie jak jego odpowiednik w tekście zwykłym: ⠒⠿ . W brajlu są dwa punkty obok siebie, a w czarnym druku jeden nad drugim. Takie oznaczenie było stosowane jako symbol dzielenia. Np.: ⠐⠂⠼⠁⠃ ⠒⠼⠙ ⠶⠼⠉⠠⠄

Jednak należy w brajlu używać innego oznaczenia operacji dzielenia: ⠲ . Czarnodrukowe oznaczenie dzielenia w postaci dwukropka z minusem (minus wraz z dwiema symetrycznymi kropkami umieszczonymi na osi symetrii doń prostopadłej): ⠲⠤⠿ jest rzadko spotykany.

<u>Przykład:</u>

Zapis: $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$

⠐⠂⠠⠓⠣⠭⠜ ⠶⠠⠛ ⠴⠋⠣⠭⠜ ⠶⠛⠣⠋⠣⠭⠜⠜ ⠠⠄ czytamy:
"funkcja h jest superpozycją (złożeniem) funkcji f i g".

<u>Przykład:</u>

Niech wektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$

⠐⠂⠨⠠⠭⠂ ⠨⠠⠽⠈⠑⠨⠨⠗⠬⠒⠠⠂ ⠨⠠⠭ ⠶⠣⠠⠭⠡⠂⠠⠂⠠
⠭⠡⠆⠠⠂ ⠭⠡⠒⠜⠂⠈ ⠨⠠⠂ ⠨⠠⠽ ⠶⠣⠠⠽⠡⠂⠠⠂⠠
⠽⠡⠆⠠⠂ ⠽⠡⠒⠜⠠⠄ ⠠⠄

Iloczyn skalarny tych wektorów obliczamy następująco:

$$\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

⠐⠂⠨⠠⠭ ⠨⠴⠨⠠⠽ ⠶⠠⠭⠡⠂⠽⠡⠂⠈⠦⠭⠡⠆⠽⠡⠆⠠
⠦⠭⠡⠒⠽⠡⠒⠠⠄

Przykład:

Silnia ! ⠫ wyraża się wzorem:

⠐⠂⠠⠝⠫ ⠒⠶⠠⠝⠠⠝⠈⠤⠼⠁⠄⠄⠄⠄⠼⠁⠠⠠

Przeanalizuj:

⠐⠂⠼⠑⠫⠠⠂ ⠠⠅⠫⠠⠂ ⠣⠠⠝ ⠦⠼⠉⠜⠫⠠⠠

Przykład:

Silnia ! ⠫ jest często używaną operacją.

Dwumian Newtona $\binom{n}{k}$ ⠣⠠⠝⠰⠳⠠⠅⠜ wyraża się wzorem:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

⠐⠂⠣⠠⠝⠰⠳⠅⠜ ⠒⠶⠆⠝⠫⠳⠣⠝⠈⠤⠅⠜⠫⠄⠠⠅⠫⠰⠠⠄

Przykład:

Mówimy, że x ⠠⠭ należy do sumy zbiorów A ⠨⠁ i B ⠨⠃ wtedy i tylko wtedy, gdy x ⠠⠭ należy do A ⠨⠁ lub x ⠠⠭ należy do B ⠨⠃ i zapisujemy:

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

⠐⠂⠣⠠⠭⠈⠑⠨⠁ ⠯⠩⠨⠃⠜⠐⠶⠂⠠
⠣⠠⠭⠈⠑⠨⠁ ⠩⠂⠠⠭⠈⠑⠨⠃⠜⠠⠄

Przykład:

Rozwiążmy prostą nierówność modułową:

$$|x| < 1 \Leftrightarrow x < 1 \wedge x > -1$$

Przykład:

Zapis czytamy: "nieprawda, że a należy do zbioru *A*". Prawa de Morgan'a wyrażają się wzorami:

$$\neg(x \in A \cup B) \Leftrightarrow \neg x \in A \wedge \neg x \in B$$

Przykład:

Różnicę zbiorów *A* i *B* określamy następująco:

$$(x \in (A \setminus B)) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

i czytamy: "*x* należy do różnicy zbiorów *A* i *B*, wtedy i tylko wtedy, gdy x należy do zbioru *A* i *x* nie należy do zbioru *B*".

Przykład:

Różnica symetryczna $A \Delta B$ zbiorów *A*, *B* określona jest następująco:

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

⠐⠂⠨⠁ ⠌⠄⠨⠃ ⠒⠶⠣⠨⠁ ⠡⠄⠨⠃⠜ ⠯⠩⠣⠨⠃ ⠡⠄⠨⠁⠜⠠⠄

W wersji brajlowskiej zapis ułamka zaczyna się od znaku początku licznika, (który jest oznaczeniem początku ułamka) i jego treści, po której następuje znak kreski ułamkowej, mianownik i znak końca ułamka, który jest z kolei oznaczeniem końca mianownika. Obowiązują tu następujące zasady:

1. przed licznikiem stoi znak rozpoczęcia ułamka (2,3) - ⠿ ⠆⠿ . Z lewej jego strony musi pozostać puste miejsce, gdy nie koliduje to z prawostronnym przyciąganiem znaku poprzedzającego ułamek - jest lewostronnie odpychający i prawostronnie przyciągający.
2. kreska ułamkowa (1,2,5,6) ⠳ może stać pomiędzy pustymi miejscami, gdyż jest obustronnie swobodna.
3. za mianownikiem stoi znak końca ułamka (5,6) ⠿⠰ ⠿ . Z jego prawej strony musi pozostać puste miejsce, gdy nie koliduje to z lewostronnym przyciąganiem znaku następującego po ułamku – jest lewostronnie przyciągający i prawostronnie odpychający.
4. w omawianym tu zapisie, wewnątrz licznika i mianownika, można zostawiać puste miejsca.

⠐⠂⠰⠠⠁⠭ ⠖⠃⠽ ⠖⠉ ⠳ ⠏⠽ ⠖⠟⠽ ⠖⠗⠰⠠⠄

Istnieją następujące skrótowe możliwości:

a. Można zapisać mianownik bezpośrednio za kreską ułamkową, bez pustego miejsca. Oznaczenie końca ułamka jest wówczas zbędne, ponieważ pierwsze puste miejsce kończy mianownik. W jego wnętrzu odstępy wypełniamy wtedy czwartym punktem.
b. Z licznikiem można postępować podobnie, jednakże przednie ograniczenie ułamka może być opuszczone tylko wtedy, gdy jest on krótki, a jego początek łatwo rozpo-

znawalny. Nie może brakować ograniczenia, gdy np. licznik rozpoczyna się od znaku operacji:

⠐⠂⠆⠤⠠⠁⠈⠖⠤⠊⠃⠳⠉⠠⠄

Opisane powyżej sposoby zapisu powinno się stosować jedynie wtedy, gdy w liczniku lub mianowniku nie ma innych ułamków poza zwykłymi.

c. Mianownik będący liczbą może być zapisany cyframi obniżonymi i umieszczony bez znaku liczbowego, bezpośrednio za kreską ułamkową.

⠐⠂⠠⠍⠳⠆⠠⠂ ⠰⠏⠳⠖⠠⠂ ⠆⠠⠁⠃ ⠖⠉⠙ ⠳⠢⠠⠐
⠨⠗⠳⠂⠴⠠⠄

d. Gdy licznik jest liczbą, kreskę ułamkową można pominąć. Dochodzi się wówczas do sposobu zapisu ułamków zwykłych z rozdziału 2. Obie strony tych ułamków muszą pozostać wolne. Ich początek nie musi być zaznaczony.

⠐⠂⠆⠠⠝⠈⠤⠼⠁⠳⠆⠠⠂ ⠼⠁⠳⠼⠃⠠⠝⠈⠤⠼⠁⠠⠂
⠄⠁⠈⠖⠃⠳⠁⠈⠤⠃⠠⠂
⠄⠏⠈⠖⠟⠳⠈⠤⠝ ⠶⠆⠤⠏⠈⠤⠟⠳⠝ ⠶⠤⠆⠏⠈⠖⠟⠳⠝⠠⠄

Przykład:

Jeżeli mamy podzielić dwa wielomiany

$3x^2+4x+5$
x^2-5x+8

⠐⠂⠼⠉⠠⠭⠬⠆ ⠖⠼⠙⠠⠭ ⠖⠼⠑ ⠠⠄ i
⠐⠂⠠⠭⠬⠆ ⠤⠼⠑⠠⠭ ⠖⠼⠓ ⠠⠄ najlepiej zapisać to w postaci ułamka pełnego:

$$\frac{3x^2+4x+5}{x^2-5x+8}$$

⠐⠂⠆⠼⠉⠠⠭⠬⠆⠀⠖⠼⠙⠠⠭⠀⠖⠼⠑⠠
⠳⠀⠠⠭⠬⠆⠀⠤⠼⠑⠠⠭⠀⠖⠼⠓⠰⠠⠄

Jednak gdy wielomian kwadratowy chcemy podzielić przez liczbę, to można zastosować zapis skrócony:

$$\frac{3x^2+4x+5}{3}$$

⠐⠂⠆⠼⠉⠭⠬⠆⠀⠖⠼⠙⠭⠀⠖⠼⠑⠀⠳⠒⠠⠄

Dopuszczalny też jest zapis:

⠐⠂⠼⠉⠭⠬⠆⠈⠖⠼⠙⠭⠈⠖⠼⠑⠳⠒⠀⠠⠄ jednak ze względu na mniejszą czytelność nie jest zalecany w szkole.

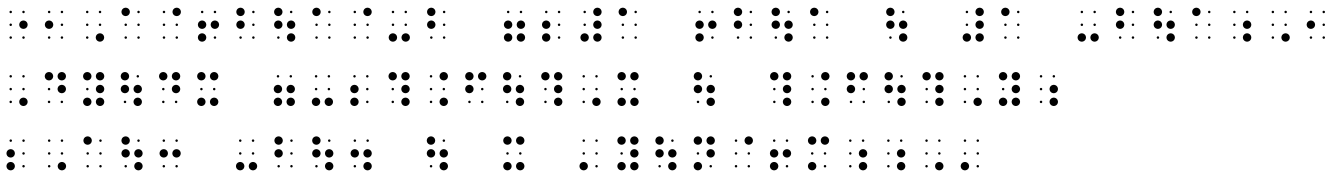
Ułamki podwójne:

Ułamek główny należy zapisać w formie pełnej, a występujący w jego liczniku lub mianowniku mniejszy ułamek, zapisać w sposób skrócony.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

$$\frac{\frac{a}{3}-\frac{b}{4}}{\frac{x\cdot y}{n+m}}$$

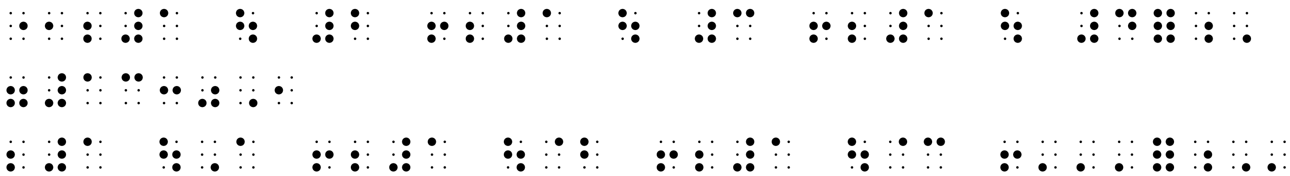


Ułamki łańcuchowe:

W ich przypadku warto stosować zapis pełny. Początek każdego nowego ułamka składowego zaznacza się znakiem początku ułamka. Znak końca ułamka, poprzedzony sześciopunktem, oznacza koniec większej liczby kresek ułamkowych.

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}=\frac{13}{30}$$

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\ldots}}}$$



W analogiczny sposób można, za pomocą symbolu początku ułamka i następującego po nim sześciopunktu, oznaczyć wspólny początek większej liczby ułamków.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{\frac{\frac{1}{4}+1}{3}+1}{2}=\frac{17}{24}$$

⠶⠆⠿⠼⠁ ⠳ ⠼⠙⠰ ⠖⠼⠁ ⠳ ⠼⠙⠰ ⠖⠼⠁ ⠳ ⠼⠃⠰⠠
⠶⠼⠁⠛⠆⠲⠠⠄

W ten sposób można zapisywać tzw. "rosnące ułamki łańcuchowe". Takie ułamki zapisujemy nie w kierunku wstępującym, lecz zstępującym.

Ułamki występujące w indeksach, wykładnikach, w pierwiastkach i w poziomych wiązaniach, są omówione w dalszej części poradnika.

18.2 Oznaczenia relacji

Podobnie jak w przypadku tabeli 12.1, poniższa tabela zawiera oznaczenia zaprojektowane wcześniej przez profesora Ephesera i wiele nowych, niezbędnych w nowoczesnej matematyce i komputerowym przygotowywaniu matematycznych dokumentów. Są wśród nich przeróżne strzałki, harpuny, kliny i oznaczenia relacji porządku. Ostatnia pozycja zawiera propozycję oznaczania nowych znaków. Zaprojektowano specyficzny klucz dla tych oznaczeń (4,6) sz - ⠨⠿ , po którym może nastąpić numer wprowadzanego oznaczenia, albo trzyliterowy skrót jego nazwy.

[Tabela 12.2]

1.	jest równy	⠿ ⠶⠿
2.	nie jest równy	⠿ ⠔⠶⠿
3.	równość wektorów	⠿ ⠨⠶⠿
4.	równość asymptotyczna	⠿ ⠨⠁⠶⠿
5.	jest tożsamościowo równy, przystaje	⠿ ⠶⠶⠿
6.	nie jest tożsamościowo równy, nie przystaje	⠿ ⠔⠶⠶⠿

7. jest równy z definicji

lub:

lub:

8. zamiennik

9. równoważny, podobny, tego samego rzędu, proporcjonalny do

10. nierównoważny, niepodobny, nie jest tego samego rzędu, nieproporcjonalny

11. pionowy wężyk

12. w przybliżeniu jest równy

lub:

13. przystaje geometrycznie

14. nie przystaje geometrycznie

15. rzutowane na

16. możliwe że

17. odpowiada

18. proporcjonalny do

19. podzielny

20. niepodzielny

21. największy z

22. prostopadły do

23. prostopadłość wektorów

24. równoległy do

25. równoległość wektorów

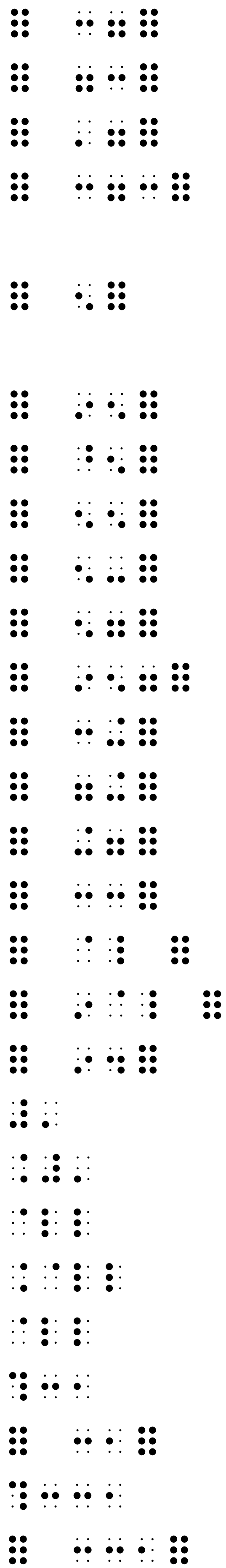
26. równoległy i równy

27. strzałka w prawo

lub:

28. długa strzałka w prawo

lub:



29. strzałka w lewo ⠹⠐⠒

lub: ⠿ ⠐⠒⠿

30. długa strzałka w lewo ⠹⠐⠒⠒

lub: ⠿ ⠐⠒⠒⠿

31. obustronna strzałka ⠹⠐⠒⠂

lub: ⠿ ⠐⠒⠂⠿

32. długa obustronna strzałka ⠹⠐⠒⠒⠂

lub: ⠿ ⠐⠒⠒⠂⠿

33. strzałka w górę ⠹⠂

34. strzałka w dół ⠐⠹

35. pionowa obustronna strzałka ⠐⠹⠂

36. rosnąca strzałka w prawo ⠹⠔⠂

lub: ⠿ ⠔⠂⠿

37. rosnąca strzałka w lewo ⠹⠐⠢

lub: ⠿ ⠐⠢⠿

38. malejąca strzałka w prawo ⠹⠢⠂

lub: ⠿ ⠢⠂⠿

39. malejąca strzałka w lewo ⠹⠐⠔

lub: ⠿ ⠐⠔⠿

40. strzałka w prawo z górnym haczykiem ⠹⠘⠒⠂

lub: ⠿ ⠘⠒⠂⠿

41. strzałka w prawo z dolnym haczykiem ⠹⠰⠒⠂

lub: ⠿ ⠰⠒⠂⠿

42. strzałka w lewo z górnym haczykiem ⠹⠐⠒⠘

lub: ⠿ ⠐⠒⠘ ⠿

43. strzałka w lewo z dolnym haczykiem ⠹⠐⠒⠰

lub: ⠿ ⠐⠒⠰ ⠿

44. strzałka w prawo z pionową kreską ⠹⠸⠒⠂

lub: ⠿ ⠸⠒⠂⠿

45. strzałka w lewo z pionową kreską ⠹⠐⠒⠸ ⠿
lub: ⠿ ⠐⠒⠸ ⠿

46. falista strzałka w prawo ⠹⠢⠒⠂
lub: ⠿ ⠢⠒⠂⠿

47. falista strzałka w lewo ⠹⠐⠒⠢
lub: ⠿ ⠐⠒⠢⠿

48. górny harpun w prawo ⠹⠒⠑ ⠿
lub: ⠿ ⠒⠑ ⠿

49. dolny harpun w prawo ⠹⠒⠔
lub: ⠿ ⠒⠔⠿

50. górny harpun w lewo ⠹⠊⠒
lub: ⠿ ⠊⠒ ⠿

51. dolny harpun w lewo ⠹⠢⠒
lub: ⠿ ⠢⠒ ⠿

52. dwa harpuny naprzemienne ⠹⠢⠶⠑ ⠿
lub: ⠿ ⠢⠶⠑ ⠿

53. strzałka implikacji ⠹⠶⠂
lub: ⠿ ⠶⠂⠿

54. długa strzałka implikacji ⠹⠶⠶⠂
lub: ⠿ ⠶⠶⠂⠿

55. lustrzane odbicie strzałki implikacji ⠹⠐⠶
lub: ⠿ ⠐⠶⠿

56. lustrzane odbicie długiej strzałki implikacji ⠹⠐⠶⠶
lub: ⠿ ⠐⠶⠶⠿

57. strzałka implikacji w górę ⠶⠹⠂

58. strzałka implikacji w dół ⠐⠶⠹

59. strzałka równoważności ⠹⠐⠶⠂
lub: ⠿ ⠐⠶⠂⠿

60. długa strzałka równoważności	⠹⠐⠶⠶⠂
lub:	⠿ ⠐⠶⠶⠂⠿
61. pionowa strzałka równoważności	⠐⠶⠹⠂
62. strzałka konsekwencji syntaktycznej	⠹⠸⠒
lub:	⠿ ⠸⠒⠿
63. lustrzane odbicie strzałki konsekwencji syntaktycznej	⠹⠒⠸ ⠿
lub:	⠿ ⠒⠸ ⠿
64. strzałka konsekwencji semantycznej	⠹⠸⠶
lub:	⠿ ⠸⠶⠿
65. lustrzane odbicie strzałki konsekwencji semantycznej	⠹⠶⠸ ⠿
lub:	⠿ ⠶⠸⠿
66. większe niż	⠿ ⠕⠂⠿
67. nie większe niż	⠿ ⠔⠕⠂⠿
68. większe lub równe	⠿ ⠕⠶⠿
lub:	⠿ ⠕⠤⠿
69. mniejsze niż	⠿ ⠪⠄⠿
70. nie mniejsze niż	⠿ ⠔⠪⠄⠿
71. mniejsze lub równe	⠿ ⠪⠶⠿
lub:	⠿ ⠪⠤⠿
72. dużo większe niż	⠿ ⠕⠕⠂⠿
73. dużo mniejsze niż	⠿ ⠪⠪⠄⠿
74. mniejsze albo większe	⠿ ⠪⠄⠕⠂⠿
75. większe albo mniejsze	⠿ ⠕⠂⠪⠄⠿
76. większe lub równe albo mniejsze	⠿ ⠕⠶⠪⠄⠿
77. mniejsze lub równe albo większe	⠿ ⠪⠶⠕⠂⠿
78. poprzedza	⠿ ⠪⠆⠿
79. nie poprzedza	⠿ ⠔⠪⠆⠿
80. poprzedza lub współwystępuje	⠿ ⠪⠆⠶⠿
81. jest następnikiem	⠿ ⠕⠆⠿

82. nie jest następnikiem	⠿ ⠔⠕⠆⠿
83. jest następnikiem lub współwystępuje	⠿ ⠕⠆⠶⠿
84. jest podzbiorem	⠿ ⠣⠄⠿
85. jest podzbiorem lub całym zbiorem	⠿ ⠣⠶⠿
86. zawiera zbiór	⠿ ⠜⠂⠿
87. zawiera zbiór lub jest całym zbiorem	⠿ ⠜⠶⠿
88. należy do zbioru	⠈⠑
89. nie należy do zbioru	⠔⠈⠑
90. klin w prawo	⠿⠹⠲⠂⠿
91. duży klin w prawo	⠿⠹⠨⠲⠂⠿
92. podkreślony duży klin w prawo	⠿⠹⠨⠲⠂⠤⠿
93. klin w lewo	⠿⠹⠐⠲⠿
94. duży klin w lewo	⠿⠹⠨⠐⠲⠿
95. podkreślony duży klin w lewo	⠿⠹⠨⠐⠲⠤⠿
96. klin w górę	⠿⠹⠂⠲⠿
97. duży klin w górę	⠿⠹⠨⠂⠲⠿
98. klin w dół	⠿⠐⠹⠲⠿
99. duży klin w dół	⠿⠐⠹⠨⠲⠿
100. nowy znak	⠿ ⠨⠿⠝⠗ ⠿ ⠿ ⠨⠿⠕⠵⠝

Poniższym symbolom, które nie były do tej pory używane w brajlowskiej notacji nadano następujące trzyliterowe skróty:

pionowa kreska - mid

muszka - bwt

kokardka - jin

uśmiechnięta buzia - sml

smutna buzia - frw

Przedstawione skróty zgodnie z powyższą tabelą musi poprzedzać w oznaczeniu klucz z pozycji 100.

1. pionowa kreska ⠨⠿⠍⠊⠙
2. muszka ⠨⠿⠃⠺⠞
3. kokardka ⠨⠿ ⠊⠝
4. uśmiechnięta buzia ⠨⠿⠎⠍⠇
5. smutna buzia ⠨⠿⠋⠗⠺

Każde z tych oznaczeń składa się z pięciu znaków. Druga propozycja przedstawiona w tabeli jest nieco krótsza. Poza tymi dwiema metodami nie znaleziono jak dotąd lepszej.

Symbolom zamieszczonym w powyższej przykładowej liście możemy nadać alternatywne oznaczenia liczbowe. Piszemy wtedy klucz (4,6), sz ⠨⠿ , a następnie stosowny numer zapisany obniżonymi cyframi:

pionowa kreska ⠨⠿⠂
muszka ⠨⠿⠆
kokardka ⠨⠿⠒
uśmiechnięta buzia ⠨⠿⠲
smutna buzia ⠨⠿⠢

Przykład:

Funkcja określona wzorem:

$f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ ⠐⠂⠠⠋⠣⠭⠜⠈⠶⠼⠁⠳⠭⠈⠼⠃⠠⠄ jest określona dla

$x \in \boldsymbol{R}$ ⠐⠂⠠⠭⠈⠑⠨⠨⠗ ⠠⠄ i $x \neq 2$ ⠐⠂⠠⠭ ⠔⠶⠼⠃⠠⠄

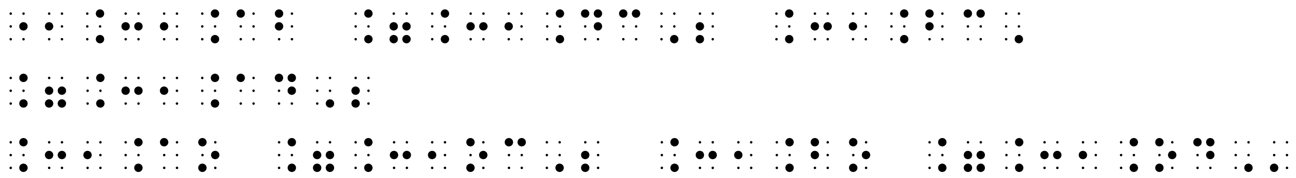
Inaczej możemy zapisać, że funkcja f ⠐⠂⠠⠋ ⠠⠄ jest określona dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$

⠐⠂⠠⠭⠈⠑⠨⠨⠗ ⠡⠠⠪⠂⠄⠼⠃⠠⠐⠕⠠⠄

<u>Przykład:</u>

W równoległoboku *ABCD*, którego przekątne przecinają się w punkcie *O*, możemy wskazać następujące pary równych wektorów:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}; \ \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$$



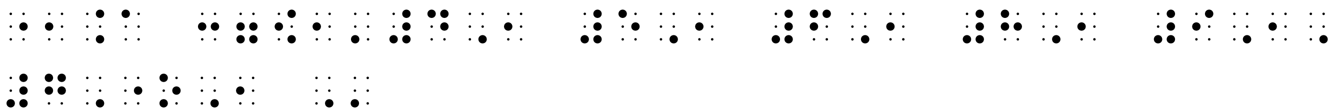
<u>Przykład:</u>

Zdania α i β nazywamy równoważnymi, jeśli mają tę samą wartość logiczną, co zapisujemy: $\alpha \equiv \beta$

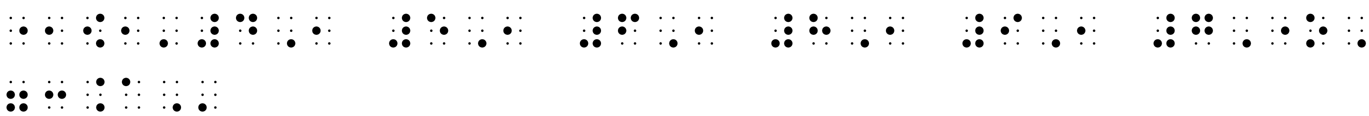
<u>Przykład:</u>

Niech A będzie z definicji równe zbiorowi sześciu liczb naturalnych:

A:={4,5,6,8,9,7}



albo: {4,5,6,8,9,7}=: A



<u>Przykład:</u>

Często operujemy wartościami przybliżonymi i tak np.:

$\pi \approx 3,1415, \frac{1}{3} \approx 0,33$

Przykład:

Pole powierzchni ΔABC jest równe 2 cm^2. Obliczyć pole powierzchni ΔXYZ jeżeli: $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ (jest podobny) w skali 1:2.

Przykład:

Mówimy, że liczba całkowita $m \neq 0$ dzieli liczbę całkowitą a jeżeli istnieje taka liczba całkowita n, że:

$m : n = a$

Fakt ten zapisujemy tak $m \mid a$

Jeżeli $m \mid a$ i $m \mid b$

to $m \mid a + b$

i $m \mid a - b$

Przykład:

Liczba 12 nie jest podzielna przez 8, co zapisujemy symbolicznie tak:

$8 \nmid 12$

Niech $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{N}$ będzie zbiorem wszystkich naturalnych liczb pierwszych, to:

$$n \in \mathrm{P} \Leftrightarrow \bigwedge_{k \in \mathrm{N} \setminus \{n\}} k \nmid n$$

Przykład:

W trapezie $ABCD$, $AB \perp AD$, $\overline{AB} = 2$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{AD} = 3$ cm

Obliczyć pole powierzchni tego trapezu.

Dla dowolnych niezerowych wektorów mamy:

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} = 0$$

Przykład:

Wyrażenie: funkcja f przekształca zbiór X w zbiór Y możemy zapisać:

$f : X \to Y$ lub

Analogiczną strzałką oznacza się zbieżność:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Jednak lepiej zbieżność zapisywać tak:

Przykład:

Wyrażenie, że 0 jest granicą ciągu $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in N}$ zapisujemy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Jednak lepiej zbieżność zapisywać tak:

Przykład:

Symbole $\nearrow$ i $\searrow$ używane są często dla określenia funkcji monotonicznych, np. $g(x)\nearrow^{\infty}, x\to b$ oznacza, że funkcja g jest monotonicznie rosnąca do nieskończoności przy x dążącym do b. Analogicznie $f(x)\searrow_{0}, x\to a$

oznacza, że funkcja f jest monotonicznie malejąca do zera przy x dążącym do a.

Podobnie oznacza się zbieżność monotoniczną ciągów.

Przykład:

Zamiast słów: **Jeśli** ... **to**, używamy symbolu $\Rightarrow$ zamiast słów **Wtedy i tylko wtedy gdy** używamy symbolu $\Leftrightarrow$. Zbiór A zawiera się w zbiorze B wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego x spełniony jest warunek:

jeśli $x\in A$ to $x\in B$

Zapisujemy to symbolicznie tak:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow \left(\bigwedge_{x} : x \in A \Rightarrow x \in B \right)$$

W Polsce przyjęło się stosować tylko jeden symbol zawierania. Jeśli jest potrzeba, to dookreśla się słownie, czy zawieranie jest ostre, czy nie. Natomiast w notacji anglosaskiej stosuje się symbole zawierania ostrego i nieostrego.

<u>Przykład:</u>

Niech f będzie funkcją określoną wzorem: $f(x) = x^2 - 1$

Funkcję f można przedstawić zamiennie w postaci iloczynowej:

$$f(x) = (x-1)\cdot(x+1)$$

Symbolicznie zapisujemy to następująco:

$$(x^2 - 1) :=: (x-1)\cdot(x+1)$$

<u>Przykład:</u>

Niech A i H będą podzbiorami przestrzeni współrzędnych $\boldsymbol{R}^3$ określonymi następująco:

$A=\{(x,y,z): x=y=z\}$,
$H=\{(x,y,z): x+y+z=1\}$

Łatwo zauważyć, że A jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0,0,0), (1,1,1)$
a H jest płaszczyzną przechodzącą przez trzy punkty: $(1,0,0), (0,1,0)$
oraz $(0,0,1)$

Prostą A można zrzutować na płaszczyznę H. Niech B oznacza rzut prostopadły A na H.
Symbolicznie zapisujemy to następująco:

$$B = A \overset{-}{\wedge} H$$

<u>Przykład:</u>

Możliwe, że istnieje taka liczba naturalna n większa od dwóch oraz istnieją takie liczby całkowite a, b, c że zachodzi równość:

$$a^n + b^n = c^n$$

Symbolicznie zapisujemy to następująco:

$$\underset{\wedge}{=}\left[\bigwedge_{n\in N}, n>2 \bigwedge_{a,b,c\in Z}\right]: a^n+b^n=c^n$$

Ten krótko sformułowany problem był postawiony przez Fermata trzysta lat temu. Został rozwiązany dopiero w roku 1994. W literaturze znany jest jako wielkie twierdzenie Fermata.

<u>Przykład:</u>

Rozwiązać równanie dwukwadratowe:

$x^4 + x^2 - 2 = 0$

dokonując podstawienia $z = x^2$ otrzymujemy równanie kwadratowe:

$z^2 + z - 2 = 0$

Posiada ono dwa pierwiastki:

$z_1 = -2, z_2 = 1$

Rozwiązaniu z_1 odpowiadają dwa pierwiastki urojone:

$x_1 = -\sqrt{2}$ i $x_2 = \sqrt{2i}$

a rozwiązaniu z_2 odpowiadają dwa rzeczywiste pierwiastki:

$x_3 = -1,\ x_4 = 1$

Ostatnie zdanie zapisujemy symbolicznie następująco:

$$[x_1 = -\sqrt{2i},\ x_2 = \sqrt{2i}] \hat{=} -2$$

$$[x_3 = -1,\ x_4 = 1] \hat{=} 1$$

oraz:

19. Separatory matematyczne

19.1 Nawiasy, ograniczniki i pionowe kreski. Oznaczenia wielolinijkowe

[Tabela 13.1]

1. nawias okrągły	⠣⠿⠄⠄⠄⠿⠜
2. nawias kwadratowy	⠷⠿⠄⠄⠄⠿⠾
3. nawias klamrowy	⠪⠂⠄⠿⠄⠄⠄⠿⠠⠐⠕
lub:	⠣⠄⠿⠄⠄⠄⠿⠠⠜
4. nawias ostrokątny	⠷⠂⠿⠄⠄⠄⠿⠐⠾
5. nawias rozwartokątny	⠷⠄⠿⠄⠄⠄⠿⠠⠾
6. pionowa kreska	⠈⠸
lub:	⠿⠸ ⠿
7. para pionowych kresek	⠈⠸⠿⠄⠄⠿⠸
8. para podwójnych pionowych kresek	⠈⠸⠸⠿⠄⠄⠿⠸⠸
lub:	⠈⠿⠄⠄⠄⠿
9. wyznacznik macierzy w postaci rozpisanej	⠈⠸⠿⠄⠄⠄⠿⠸ ⠸⠿⠄⠄⠄⠿⠸ ⠸⠿⠄⠄⠄⠿⠸
10. norma macierzy dla postaci rozpisanej	⠈⠸⠸⠿⠄⠄⠄⠿⠸⠸ ⠸⠸⠿⠄⠄⠄⠿ ⠸⠸⠿⠄⠄⠄⠿⠸⠸
lub:	⠈⠿⠄⠄⠄⠿ ⠿⠄⠄⠄⠿ ⠿⠄⠄⠄⠿

11. nawiasy macierzowe dla postaci rozpisanej

12. klamra wiążąca

13. znak nowej linijki

14. dolny lewy ogranicznik

15. górny lewy ogranicznik

16. dolny prawy ogranicznik

17. górny prawy ogranicznik

18. ukośnik wstecz

19. ukośnik

20. symbol Newtona "n po k"

Przykład:

Rozwiążmy układ równań:

$$4x + 2y = 1$$
$$3x - y = 4{,}5$$

Rozwiązanie:

Z drugiego równania wyliczamy y :

$$4x + 2y = 1$$
$$y = 3x - 4{,}5$$

i

i podstawiając do pierwszego równania otrzymujemy:

$$4x + 2 \cdot (3x - 4{,}5) = 1$$
$$y = 3x - 4{,}5,\ \mathit{stąd}:$$
$$x = 1 \ \ i \ \ y = 2x - 4{,}5,$$
$$\mathit{wiec} \ \ x = 1 \ \ i \ \ y = -1{,}5$$

⠐⠂⠼⠙⠠⠭ ⠖⠼⠃⠄⠣⠼⠉⠠⠭ ⠤⠼⠙⠂⠑⠜ ⠶⠼⠁ ⠄⠄⠊
⠐⠂⠠⠽ ⠶⠼⠉⠠⠭ ⠤⠼⠙⠂⠑⠠⠂ ⠠⠄⠎⠞⠡⠙⠒
⠐⠂⠠⠭ ⠶⠼⠁ ⠠⠄⠊ ⠐⠂⠠⠽ ⠶⠼⠉⠠⠭ ⠤⠼⠙⠂⠑⠠⠂
⠠⠠⠺⠊⠱⠉⠒ ⠐⠂⠠⠭ ⠶⠼⠁ ⠠⠄⠊ ⠠⠽ ⠶⠤⠼⠁⠂⠑⠠⠄

Ten układ równań zapisany z użyciem klamry wiążącej wygląda następująco:

⠐⠂⠪⠒⠄⠼⠙⠠⠭⠈⠖⠼⠃⠽⠈⠶⠼⠁⠰⠺⠼⠉⠭⠈
⠈⠤⠽⠈⠶⠼⠙⠂⠑⠠⠒⠇⠠⠄

W przypadku nawiasów klamrowych z trzeciej pozycji powyższej tabeli, dla uniknięcia konfliktów wprowadzono w brajlu drugie, alternatywne oznaczenie.

Pary podwójnych kresek nie mogą mieć po wewnętrznych stronach pustych miejsc. Lewa strona przednich kresek jest zajęta przez punkt (4), a tylne kreski są prawostronnie odpychające. Podwójną pionową kreskę reprezentuje również znak sześciopunktu, który w brajlu wygląda jak dwie pionowe kreski.

<u>Przykład:</u>

Permutację $(1,4,3,2)$ ⠐⠂⠣⠼⠁⠠⠂ ⠼⠙⠠⠂ ⠼⠉⠠⠂ ⠼⠃⠜⠠⠠ zbioru $(1,2,3,4)$ ⠐⠂⠣⠼⠁⠠⠂ ⠼⠃⠠⠂ ⠼⠉⠠⠂ ⠼⠙⠜ ⠠⠠ czasami zapisujemy w postaci umieszczonej w nawiasie okrągłym dwóch wierszy. W pierwszym wierszu piszemy kolejno elementy: 1 4 3 2 ⠼⠁ ⠼⠙ ⠼⠉ ⠼⠃ permutacji $(1,4,3,2)$

⠐⠂⠣⠼⠁⠠⠂ ⠼⠙⠠⠂ ⠼⠉⠠⠂ ⠼⠃⠜⠂ ⠠⠄

a w drugim wierszu wymieniamy kolejno elementy zbioru: 1 2 3 4 .

Tak więc mamy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

lub:

Przykład:

Symbol Newtona zapisujemy w postaci umieszczonej w nawiasie okrągłym macierzy o dwóch wierszach i jednej kolumnie. W pierwszym wierszu znajduje się liczba n, a w drugim liczba k. Tak więc dla

$n = 5$ i $k = 3$ mamy:

$$\binom{n}{k}, \binom{5}{3}$$

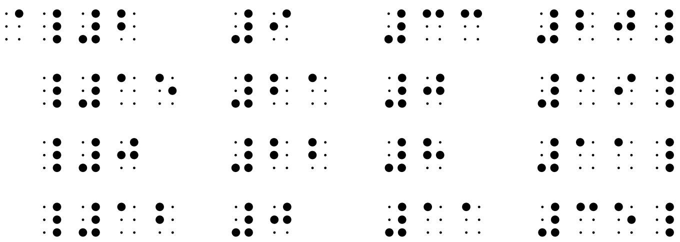
Obliczmy ten dwumian Newtona:

$$\binom{5}{3} := \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

W czarnym druku wyznacznik macierzy kwadratowej w postaci rozpisanej oznacza się czasem poprzez umieszczenie po obu jej stronach pionowych kresek, obejmujących jej wiersze. Analogicznie oznacza się normę macierzy we wskazanej postaci. Zamiast pojedynczych pionowych kresek piszemy podwójne pionowe kreski.

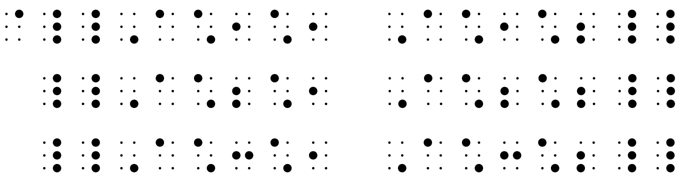
Przykład:

Wyznacznik macierzy:

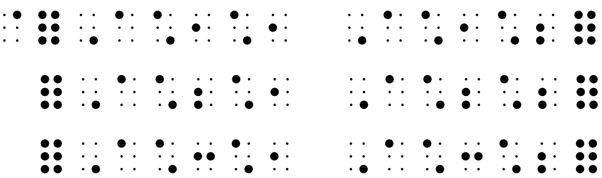


Przykład:

Norma macierzy:



lub:



Ogranicznikami macierzy mogą być wszystkie symbole od 1 do 11 i 14 do 17 powyższej tabeli. W czarnym druku jeden z symboli umieszczamy bezpośrednio z jej lewej strony, a drugi za nią. Do tych ograniczników można dołączyć sześć rodzajów strzałek z tablicy 12.2.

Są to:

– strzałka w górę,

– strzałka w dół,
– pionowa obustronna strzałka,
– strzałka implikacji skierowana w górę,
– strzałka implikacji skierowana w dół,
– pionowa strzałka równoważności.

Pary ograniczników nie muszą być takie same. Lewy ogranicznik macierzy może być strzałką w górę, a prawy zamykającym nawiasem kwadratowym.

Przykład:

Macierz ujęta w lewe i prawe ograniczniki:

⠈⠘⠷⠿⠄⠄⠄⠿⠈⠘⠾
⠈⠘⠷⠿⠄⠄⠄⠿⠈⠘⠾
⠈⠘⠷⠿⠄⠄⠄⠿⠈⠘⠾

Otwierający i zamykający nawias okrągły dla macierzy przedstawionej w postaci rozpisanej zazwyczaj nazywa się nawiasami macierzowymi (czasami klamrami macierzowymi).

Notacja przewiduje specjalne nawiasy stosowane w wyjątkowych sytuacjach. Powstają one poprzez dopisanie przed nawiasem otwierającym i zamykającym znaku liczbowego:

⠼⠣⠠⠠⠠⠼⠜
⠼⠷⠠⠠⠠⠼⠾
⠼⠪⠂⠄⠠⠠⠠⠼⠠⠐⠕

Specjalne oznaczenia brajlowskie dla dużych nawiasów, separatorów matematycznych, nie są konieczne. Jeśli chcemy odróżnić duże nawiasy okrągłe, kwadratowe, klamrowe, od ich mniejszych odpowiedników, należy po wewnętrznej stronie dużego nawiasu umieścić sześciopunkt.

W czarnym druku duży otwierający nawias klamrowy, obejmujący odpowiednią liczbę linijek, nazywamy klamrą wiążącą (spinającą). Jej oznaczenie w zapisie brajlowskim umieszczamy we wszystkich linijkach wyłącznie wtedy, gdy czarnodrukowe linijki mieszczą się w linijkach brajlowskich. W innych przypadkach używamy jedynie klamry otwierającej na początku zapisu i zamykającej na jego końcu. Klamra wiążąca jest zapisywana za pomocą oznaczenia 12 z powyższej tabeli:
(2,4,6), (2,5), (3) ⠪⠒⠄ oraz (6), (2,5), (1,3,5) ⠠⠒⠕, a stosuje się ją tak, jak poniżej.

Przykład:

Niech $f:[0,1]\rightarrow[0,1]$

⠐⠂⠠⠋⠒⠷⠼⠚⠠⠂⠼⠁⠾ ⠒⠂⠷⠼⠚⠠⠂⠼⠁⠾ ⠠⠄ będzie funkcją ciągłą.
Rozszerzmy funkcję f ⠠⠋ do ciągłej funkcji $g:R\rightarrow R$

⠐⠂⠠⠛⠒⠨⠗ ⠒⠂⠨⠗ ⠠⠄ przyjmując:

$$g(x)=\begin{cases} f(0) \text{ jeżeli } x<0 \\ f(x) \text{ jeżeli } 0\leq x\leq 1 \\ f(1) \text{ jeżeli } x>1 \end{cases}$$

⠐⠂⠠⠛⠣⠭⠜⠈⠶⠪⠒⠄⠋⠣⠼⠚⠜⠠⠄⠚⠑⠯⠑⠇⠊⠐⠂⠭ ⠪⠄⠼⠚⠈
⠰⠳⠠⠋⠣⠭⠜⠠⠄⠚⠑⠪⠇⠊⠐⠂⠼⠚ ⠪⠶⠠⠭ ⠪⠶⠼⠁⠈
⠰⠳⠠⠋⠣⠼⠁⠜⠠⠄⠚⠑⠪⠇⠊ ⠠⠭ ⠕⠂⠼⠁⠠⠒⠕⠠⠄

Przykład:

Skoro nawiasy są najczęściej używanymi symbolami matematycznymi, przypomnijmy o nich jeszcze raz. Służą nie tylko do porządkowania działań, ale również do oznaczania różnych matematycznych oznaczeń. I tak na przykład zapisujemy:

- (nawias okrągły) - argumenty funkcji, ciągi, otwarte przedziały;

- (nawias kwadratowy) - domknięte przedziały, współrzędne wektora, indeksy;

lub - (nawias klamrowy) – zbiory;

- (nawias klamrowy) – funkcje zdefiniowane kilkoma wzorami;

- (nawias ostrokątny) - operatory, przedziały domknięte.

Jak widać, ustalenia te nie są jednoznaczne. Zależą w znacznej mierze od autorów.

<u>Przykład:</u>

Niech x będzie dowolnym wektorem, to:

$$\|x\|^2 = x \bullet x$$

Czyli norma dowolnego wektora jest równa pierwiastkowi kwadratowemu z iloczynu skalarnego tego wektora przez siebie.

<u>Przykład:</u>

Często określa się funkcję kilkoma wzorami:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Przykład:

Niech $A[0,1]$ będzie dowolnym podzbiorem domkniętego przedziału $[0,1]$.

Funkcję: $h:[0,1]\to[0,1]$ określoną wzorem:

$$h(x)=\begin{cases}1 & \text{dla } x\in A\\ 0 & \text{dla } x\in[0,1]\setminus A\end{cases}$$

nazywamy funkcją charakterystyczną zbioru A i oznaczamy h_A

Przykład:

Funkcja $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ jest określona dla $x\neq 0$ Rozszerzmy ją do funkcji F określonej na całej prostej kładąc:

$$F(x)=\begin{cases}f(x) & \text{dla } x\neq 0\\ 1 & \text{dla } x=0\end{cases}$$

19.2 Umieszczanie jednej rzeczy nad drugą

Często zdarza się, że nad symbolem matematycznym (ogólniej - napisem) zachodzi potrzeba umieszczenia innego symbolu lub jakiegoś napisu. Na przykład, aby zaznaczyć symbolicznie, że ciąg zmiennych losowych (X_n)⠣⠨⠭⠡⠠⠝⠜ zbiega względem prawdopodobieństwa do zmiennej losowej X można umieścić nad długą strzałką w prawo w wyrażeniu: $(X_n) \to X$ ⠂⠂⠣⠨⠭⠡⠠⠝⠜ ⠒⠒⠂⠨⠭⠂ ⠠⠠ napisany antykwą skrót "PR".

Innym prostym przykładem takiej sytuacji jest umieszczenie nad znakiem równości napisu "def". Otrzymanemu w ten sposób nowemu symbolowi możemy nadać znaczenie: "równy z definicji". Oczywiście nie musimy ograniczać się do umieszczania nad sobą tylko dwóch obiektów. Ogólnie, należy postawić zagadnienie następująco: w jaki sposób zapisać fakt, że zostało umieszczonych kolejno jeden nad drugim n ⠠⠝ obiektów?

Oto ogólny schemat takiego zapisu. W tym celu niech $o_1, o_2, \ldots, o_n$ ⠠⠕⠡⠂⠠⠂ ⠠⠕⠡⠆⠠⠂ ⠄⠄⠄⠠⠂ ⠠⠕⠡⠝ oznaczają obiekty, które można umieszczać jeden nad drugim. Fakt ten możemy zapisać:

o_1

o_2

…

o_n

⠐⠂⠼⠣⠠⠕⠡⠂⠰⠳⠠⠕⠡⠆⠰⠳⠄⠄⠄⠰⠳⠠⠕⠡⠝⠼⠜⠠⠂

Zapis bazuje na oznaczeniu przejścia do następnej linijki. Obiekt został zapisany w specjalnym brajlowskim nawiasie dla jego odseparowania od sąsiednich oznaczeń. Dla dwóch takich obiektów: o_1, o_2 ⠠⠕⠡⠂⠂ ⠠⠕⠡⠆ możemy skorzystać z propozycji profesora Ephesera, by obiekty umieszczone jeden nad drugim zapisać jako górne przednie indeksy:

$$\begin{matrix} o_1 \\ o_2 \end{matrix}$$

⠐⠂⠐⠌⠠⠕⠡⠂⠐⠱⠕⠡⠆⠠⠄

<u>Przykład:</u>

$$(x_n) \xrightarrow{\mathrm{PR}} X$$

⠐⠂⠣⠨⠭⠡⠠⠝⠜ ⠌⠨⠏⠗⠱⠈⠒⠒⠂⠨⠭⠠⠄

lub:

⠐⠂⠣⠨⠭⠡⠠⠝⠜ ⠼⠣⠨⠏⠗⠰⠳⠈⠒⠒⠂⠼⠜⠨⠭⠠⠄

<u>Przykład:</u>

$$f(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_0^x t \; dF(t)$$

⠐⠂⠠⠋⠣⠭⠜ ⠌⠙⠑⠋⠱⠈⠶⠮⠡⠼⠞⠌⠭ ⠞ ⠙⠨⠋⠣⠠⠞⠜⠠⠄

lub:

⠐⠂⠠⠋⠣⠭⠜ ⠼⠣⠙⠑⠋⠰⠳⠈⠶⠼⠜⠮⠡⠼⠞⠌⠭⠠
⠞⠠⠙⠨⠋⠣⠠⠞⠜⠠⠄

gdzie f ⠨⠋ jest funkcją ciągłą na przedziale

$[0,1]$ ⠷⠼⠚⠠⠂ ⠼⠁⠾ a x ⠠⠭ przebiega $[0,1]$ ⠷⠼⠚⠠⠂ ⠼⠁⠾

20. Technika projekcji

20.1 Pierwiastki i dodatki

[Tabela 14]

1. znak pierwiastka ⠩ ⠿
2. wykładnik ⠿ ⠬ ⠿
3. tylny dolny indeks ⠿ ⠡ ⠿
4. tylny górny indeks ⠿ ⠌ ⠿
5. przedni dolny indeks ⠼ ⠡ ⠿
   lub: ⠿   ⠡ ⠿
6. przedni górny indeks ⠼ ⠌ ⠿
   lub: ⠿   ⠌ ⠿
7. znak pomocniczy dla dolnego indeksu ⠯ ⠡ ⠿
8. znak pomocniczy dla górnego indeksu ⠯ ⠌ ⠿
9. znak ścieśniania ⠿ ⠈ ⠿
10. oznaczenia obniżenia rzędu ⠿ ⠱
    lub: ⠿ ⠐ ⠱
    lub: ⠿ ⠨ ⠱
11. oznaczenie złożonej projekcji ⠐ ⠿
12. oznaczenie projekcji szczegółowej ⠨ ⠿

W notacji z roku 1955 oznaczenia:

⠿ ⠐ ⠿ , ⠿ ⠈ ⠿ , ⠿ ⠘ ⠿ , ⠿ ⠸ ⠿ , ⠿ ⠱ ,

traktowane były inaczej.

Oznaczały one:

- znak poziomu podstawowego (rząd zerowy),
- znak poziomu pierwszego,
- znak poziomu drugiego,
- znak poziomu trzeciego,
- znak zakończenia poziomu, czyli zmniejszenia poziomu.

Jest to główna modyfikacja notacji pomiędzy wersjami z roku 1955 i 1986. Wcześniej każdy nowy poziom był zaznaczany odpowiadającym mu oznaczeniem. Po ostatnim znaku poziomu następował znak jego zakończenia. Od roku 1986 nie stosuje się tego rozwiązania. Oznaczamy jedynie fakt podwyższenia rzędu, bez względu na jego numer. Stosuje się też znak zakończenia poziomu, jak wcześniej. Czytając formułę nie wiemy więc, na którym poziomie znajdują się poszczególne oznaczenia. W przypadku formuł, w których na jednym poziomie występuje wiele elementów, stosujemy tak zwany znak ścieśniania dla wskazania, że nadal pozostajemy wewnątrz jednego poziomu.

W czarnym druku nie zapisuje się znaków w jednej linijce, lecz na różnych wysokościach - poziomach. Dobrym i prostym tego przykładem są ułamki. Poprzez zapisanie wyżej lub niżej wskazuje się dodatki takie jak indeksy i wykładniki. W notacji brajlowskiej nie ma takich możliwości. Jest to zapis liniowy, w którym wszystkie znaki umieszcza się jeden po drugim. W zapisie matematycznym, podobnie jak w nutowym, należy więc przetransponować zapis dwuwymiarowy na jednowymiarowy. Przekształcenie to nazywamy projekcją, a jego sposób potraktowania ułamków, indeksów, wykładników, pierwiastków i ich złożeń - projektorami. Dodatkowe brajlowskie oznaczenia informują o tym, do którego poziomu zapisu należą poszczególne znaki. Czytając wyrażenia matematyczne w brajlu, nieustannie śledzimy poziom, na który kierują nas te dodatki. Po ostatnim elemencie danego poziomu wracamy na niższy poziom, chociaż w wersji brajlowskiej toczy się to w obrębie tej samej linijki. Na osi linii czarnodrukowej jest zapisany rdzeń formuły. Do niego odnoszą się inne symbole, które mogą być umieszczone wyżej lub niżej. Ten rdzeń stanowi podstawę, a czarnodrukowy poziom, na którym się znajduje, nazywamy bazowym lub podstawowym.

Inne poziomy nazywamy wyższymi, bez względu na to, czy są nad, czy pod podstawową linijką.

Do podstawy należy każdy znak czarnodrukowy, umieszczony na bazowej wysokości, który nie jest dodatkiem do innego znaku i nie leży pod, względnie nad poziomą kreską wiążącą. Tak zdefiniowana podstawa jest rzędem zerowym.

W rzędzie o numerze *r =1, 2, 3* stoją następujące elementy:

a. dodatki do znaków należących do rzędu $r-1$ ⠐⠂⠠⠗⠤⠼⠁⠠⠄

<u>Przykład:</u>

W wyrażeniach x_1 ⠠⠭⠡⠂ i x^1 ⠠⠭⠌⠂ x ⠠⠭ znajduje się na poziomie zerowym, natomiast zarówno dolna, jak i górna jedynka na poziomie pierwszym.

b. licznik i mianownik ułamka, którego kreska ułamkowa znajduje się w rzędzie $r-1$
⠐⠂⠠⠗ ⠤⠼⠁⠠⠄

<u>Przykład:</u>

W ułamku:

$$\frac{x^2-1}{x+1}$$

⠐⠂⠆⠠⠭⠬⠆ ⠤⠼⠁ ⠳⠠⠭ ⠖⠼⠁⠰ ⠠⠄ zarówno

x^2-1 ⠐⠂⠠⠭⠬⠆⠈⠤⠼⠁ ⠠⠄ jak i $x+1$ ⠐⠂⠠⠭⠈⠖⠼⠁ ⠠⠄

znajdują się na poziomie pierwszym.

c. formuły będące argumentem pierwiastków oraz nad lub pod którymi umieszczona jest pozioma kreska wiążąca z tabeli 16. Formuły pozbawione takich kresek wiążących należałyby do rzędu $r-1$ ⠐⠂⠠⠗⠤⠼⠁⠠⠄

Jak widać można opisać dowolny rząd, w praktyce jednak nie wykracza się poza trzeci. Wynika to z praktyki stosowanej w czarnym druku. Trudno wyobrazić sobie znaki stojące wyżej lub niżej od trzeciego rzędu. Pamiętajmy, że rząd bazowy nazwaliśmy zerowym. Mamy więc łącznie cztery rzędy.

Ile zatem poziomów musimy "spłaszczyć" do jednej linii w systemie brajlowskim? Mamy w czarnym druku rząd bazowy, na przykład trzy rzędy nad nim i trzy rzędy pod nim. Razem można spotkać w matematycznych tekstach zapisy zajmujące na przykład siedem poziomów. Bywa więcej, ale rzadko. Aby zadanie było dobrze wykonane, to znaczy, aby wszystkie rzędy sprowadzić do jednego brajlowskiego poziomu w taki sposób, by zapis był poprawny i jednoznaczny, należy zastosować we właściwy sposób projekcję, w której obowiązuje wiele zasad. Dotyczą one poszczególnych typów projektorów. Są one związane z różnymi rodzajami czarnodrukowych oznaczeń. Każde oznaczenie wymaga innego sposobu dla jego sprowadzenia do pojedynczej brajlowskiej linii.

W czarnym druku nie zaznacza się numerów poszczególnych poziomów zapisu. Zmiana rzędu lub to, na którym poziomie znajdują się poszczególne oznaczenia, są widoczne "gołym okiem". Zgodnie z pierwszą notacją matematyczną Ephesera z roku 1955, w systemie punktowym zapisywano numerację rzędów. Słusznie uznano, że utrudnia to odczytywanie formuł. Samo ponumerowanie kolejnych rzędów, na których znajdują się w czarnym druku znaki, nie przynosiło niewidomym pożytku. Wprowadzono więc w roku 1986 inną metodę. Zamiast znaków informujących o numerach rzędów, wprowadzono oznaczenia informujące o zmianach rzędów. Czytając w brajlu formuły, napotykamy specjalne znaki oznaczające, że kolejne symbole znajdują się w czarnym druku na innym poziomie. Wśród tych znaków specjalnych są znaki rozpoczynające i kończące dany poziom. Pełnią one rolę otwierających i zamykających nawiasów dla poszczególnych projektorów.

Aby ten skomplikowany zapis był zrozumiały, przyjęto wiele niezbędnych zasad. Dzięki nim, zarówno piszący tekst matematyczny, jak i czytający go, rozumieją matematyczne formuły w ten sam sposób. Omówmy te zasady.

20.2 Specjalne brajlowskie znaki zapowiadające dodatki do symboli

W czarnym druku często spotykamy tak zwane dodatki do symboli. Mogą to być na przykład indeksy, wykładniki potęg itd. Stoją one na wyższym lub niższym poziomie niż same symbole, do których się odnoszą. Są umieszczone wewnątrz wyższego rzędu. Zapisywanie ich na innym poziomie, w innej niż podstawowa linii, ułatwia widzącym ich odczytywanie. Od razu widać, gdzie one się znajdują, do którego znaku się odnoszą, jaką pełnią funkcję. Różnicowanie poziomów znaków świetnie je wyróżnia. W brajlu nie ma tak wygodnego narzędzia. Całe formuły są na jednym poziomie, przez co fakt zmiany rzędu musi być odnotowany przy pomocy specjalnych oznaczeń: indeksy, potęgi, pierwiastki itd. W systemie punktowym często musimy stosować specjalne znaki zapowiadające. Są one niezbędne dla poinformowania, iż tuż za nimi rozpoczyna się dodatek do symbolu. Takie znaki zapowiadające nie są potrzebne w czarnym druku. Zmianę rzędu widać - nie trzeba o niej dodatkowo informować.

Rozważmy zanotowanie prostego symbolu, który odczytujemy tak: "*x jeden*", "*x*" stoi na bazowym poziomie, "jeden" jest jego dolnym indeksem, stoi zatem o jeden poziom niżej, a więc w rzędzie pierwszym poniżej bazowego. W czarnym druku piszemy tak, jak pokazuje wypukły rysunek. Jedynka jest zapisana za literą "*x*". Jest nieco niżej. W brajlu piszemy tak:

x_1 ⠠⠭⠡⠂

Zaczynamy od znaku alfabetu. Chodzi o małą łacińską literę, więc piszemy szósty punkt. Po nim następuje litera "*x*". Czas na jedynkę. Nie możemy napisać tak:

$x1$ ⠠⠭⠼⠁

gdyż oznaczałoby to jedynkę stojącą w tym samym rzędzie, co litera "*x*". Tymczasem ma ona być niżej. Stosujemy dodatkowy znak zapowiadający dodatek - w tym przypadku dolny indeks: (1,6). Możemy więc zapisać:

x_1 ⠠⠭⠡⠼⠁

To jest całkowicie poprawny zapis. Jednak możemy również skorzystać z pewnego skrótu, który jest omówiony w osobnym rozdziale w dalszej części poradnika. Możemy mianowicie pominąć znak liczbowy i zapisać jedynkę obniżoną cyfrą. Stąd się bierze zapis:

x_1 ⠠⠭⠡⠂

Innym znakiem zapowiadającym dodatek jest znak zapowiadający górny indeks. "x" z górnym indeksem jeden zapisujemy tak:

x^1 ⠠⠭⠌⠂

Znaki zapowiadające dodatki należą do tego samego rzędu, co symbole, do których się odnoszą. Znaki te informują o podwyższeniu rzędu kolejnych symboli w formule.

Wiele czarnodrukowych oznaczeń ma swoje odpowiedniki w brajlu, które dzięki temu nie wymagają znaków zapowiadających. Indeksy są w wyjątkowej sytuacji, gdyż nie mają swoich oznaczeń w czarnym druku. Wśród znaków nie wymagających zapowiedzi i zmieniających rzędy są na przykład:

- znak pierwiastka, w którym formuła podpierwiastkowa należy do wyższego rzędu,
- kreska wiążąca, dla której formuła zakreślana nią jest w wyższym rzędzie niż ona,
- znak kreski ułamkowej (1,2,5,6) ⠳ , w przypadku której formuła znajdująca się w liczniku i formuła znajdująca się w mianowniku należą do wyższego rzędu, niż sama kreska.

Znak obniżający rząd następnych znaków, kończący projektor, stoi w tym samym rzędzie, co odpowiadający mu znak rozpoczynający tę część formuły.

W którym rzędzie stoją kolejne znaki w następującym przykładzie?

<u>Przykład:</u>

Zapiszmy zgodnie z zasadami notacji następujący fragment:
"x" z górnym indeksem "i" plus jeden, do potęgi drugiej.

$\left(x^{i+1}\right)^2$ ⠐⠂⠠⠭⠌⠊ ⠖⠼⠁⠱⠬⠆ ⠠⠄

Formułę zaczynamy od oznaczenia alfabetu, po którym następuje litera "x" i jej górny indeks. Zapisujemy w nim sumę "i plus jeden". Ten indeks wymaga zapowiedzi, wobec czego musimy wpisać tam znak zapowiadający górny dodatek: (3,4) - ⠌ Wewnątrz indeksu zapisujemy sumę: $i+1$ ⠐⠂⠠⠊⠖⠼⠁⠠⠄ Możemy pominąć oznaczenie alfabetu litery "*i*", gdyż poprzednie oznaczenie dotyczące litery "*x*" nie zostało zniesione. Plus umieszczamy po literze "*i*" i odstępie. Mamy do czynienia z tak zwanym projektorem prostym. Nie zapisujemy przed znakiem zapowiadającym ten indeks brajlowskiego znaku (5), który informuje, że należy spodziewać się bardziej złożonego wyrażenia indeksowego. Umieszczamy po sumie znak informujący o zakończeniu indeksu. Zapisujemy więc po jedynce brajlowski znak (1,5,6) ⠱ . Jest to znak kończący projektor. Należy on do tego samego rzędu, co "*x*". Informuje, że kolejne oznaczenia będą należały do niższego rzędu. Teraz zapisujemy symbol potęgowania. To kolejny znak, który w brajlu jest nieodzowny, a w czarnym druku nie istnieje. Wykładnik potęgi zapisuje się tam tak samo jak górny indeks. Często nie można ich odróżnić. W brajlu mamy osobny znak potęgowania: (3,4,6) ⠬ . Jest to również specyficzny znak informujący o dodatku związanym z symbolem. W naszym przykładzie umieszczamy więc ten znak i dwójkę napisaną obniżoną cyfrą. Znak (3,4,6) ⠬ zmienia rząd na wyższy, toteż "dwójka" należy do rzędu pierwszego. Do rzędu bazowego wracamy od razu po niej, gdyż jest tam odstęp.

20.3 Rodzaje projektorów

Wyróżniamy trzy rodzaje projektorów: proste, złożone i szczegółowe. Ich nazwy odpowiadają ich charakterowi. Proste to takie, w których nie może być innych projektorów. Z natury rzeczy są więc krótkie, najczęściej zawierają jeden element. Projektory złożone są bardziej rozbudowane. Zawierają więcej elementów, wśród których są również proste projektory. Szczegółowe natomiast, to pełna swoboda. Są wśród nich całe formuły zawierające projektory proste i złożone. Oto ich definicje:

1. Projektory proste:

Mogą zawierać jedynie znaki stojące w tym samym rzędzie, tzn. nie zawierają żadnych innych projektorów, ani ułamków innych niż zwykłe. Rozpoczynane są za pomocą zwykłego znaku indeksu, wykładnika, pierwiastka lub kreski wiążącej. Działanie każdego z tych znaków jest anulowane na kilka sposobów:

a. przez najbliższe puste miejsce,
b. przez znak kończący projektor (1,5,6) ⠱ lub, w razie potrzeby, przez pary znaków (5), (1,5,6) ⠐⠱, względnie (4,6), (1,5,6) ⠨⠱, gdy projektor prosty jest częścią lub zakończeniem innego, bardziej złożonego projektora,
c. przez inny znak rozpoczynający kolejny projektor,
d. przez kreskę ułamkową lub znak kończący ułamek,
e. przez nawias zamykający, gdy odpowiadający mu nawias otwierający stoi w innym rzędzie. Nawiasy jednej pary stoją w tym samym rzędzie. W wyrażeniu wewnątrz nawiasu żaden znak nie może stać w niższym rzędzie niż same nawiasy.

Wyjątek od powyższych reguł stanowią indeksy i wykładniki będące liczbami naturalnymi. Zapisywane są po znaku zapowiadającym dodatek obniżonymi cyframi bez znaku liczbowego. Nie wymagają znaku kończącego projektor.

Wewnątrz projektorów prostych nie może być pustych miejsc. Miejsca, które zgodnie z regułą pustych miejsc muszą pozostać puste, należy wypełnić znakiem (4).

2. Projektory złożone:

Mogą zawierać projektory proste i ułamki, wewnątrz których nie ma pustych miejsc. Rozpoczynane są przez wskazane dla prostych projektorów oznaczenia poprzedzone punktem 5. Działanie takiego złożonego oznaczenia jest anulowane:

a. przez następne miejsce puste,

b. przez znak kończący złożone projektory (5), (1,5,6) ⠐⠱, w razie konieczności przez (4,6), (1,5,6) ⠨⠱, gdy ten złożony projektor jest częścią lub końcem jakiegoś szczegółowego projektora,
c. przez oznaczenie innego złożonego lub szczegółowego projektora,
d. przez nawias zamykający, gdy odpowiadający mu nawias otwierający stoi przed znakiem projektora,
e. przez oznaczenie końca ułamka, gdy odpowiadający mu znak kreski ułamkowej stoi przed znakiem projektora.

Również wewnątrz projektorów złożonych nie może być pustych miejsc. W przypadkach koniecznych zapełnia się je znakiem (4) ⠈. Niekiedy, gdy nie dochodzi do wieloznaczności, można pominąć znak (5) ⠐ zapowiadający projektor złożony. W notacji Ephesera jest przedstawiony przykład. Rozważmy go.

$\sqrt{a^2 + b^2}$ ⠐⠂⠩⠠⠁⠬⠆⠈⠖⠃⠬⠆⠠⠠

Odczytujemy go tak: pierwiastek z sumy "*a*" kwadrat dodać "*b*" kwadrat. Pierwiastek jest projektorem złożonym. Wewnątrz niego mamy projektory proste: dwukrotne potęgowanie i dodawanie. Znak (3,4,6) ⠬ jest brajlowskim znakiem odpowiadającym operacji potęgowania. Znak (2,3) ⠆ to dwójka zapisana obniżoną cyfrą. (2,3,5) ⠖ to plus, przed którym należało napisać znak (4)⠈. Dzięki temu znakowi wiemy, że cała suma jest zapisana pod pierwiastkiem. Co więcej, dzięki niemu pominęliśmy punkt 5 informujący o złożonym charakterze projektora. Możemy zatem od razu napisać znak pierwiastka (1,4,6) ⠩ oraz pominąć znak (1,5,6) ⠱ oznaczający jego zakończenie.

Zapiszmy go inaczej.

⠐⠂⠐⠩⠠⠁⠬⠆ ⠖⠠⠃⠬⠆⠱⠠⠠

Ostatni znak: (1,5,6) ⠱ jest niezbędny, gdyż w pierwiastku wystąpił odstęp.

3. Projektory szczegółowe:

Mogą zawierać dowolne wyrażenia, inne projektory i puste miejsca. Rozpoczynane są przez znaki zapowiadające dodatki lub znaki operacji zaczynające projektory, poprzedzone znakiem (4, 6) ⠨ . Na końcu musi stać para znaków kończących projektor szczegółowy: (4,6) i (1,5,6) ⠨ ⠱

Powtórzmy ostatnio rozważany przykład:

⠐⠂⠩⠠⠁⠬⠆⠈⠖⠃⠬⠆⠠⠄

Jak już wyjaśniliśmy, pierwiastek ten jest projektorem złożonym. Zapisaliśmy go bez piątego punktu, dzięki ulokowaniu wewnątrz sumy punktu czwartego. Rozwiniemy ten przykład. Otrzymamy zapis wymagający zastosowania projektora szczegółowego:

$$\sqrt{\left(a^{i_1}+2\right)^2+\left(b^{i_1}-5\right)^2}$$

⠐⠂⠨⠩⠣⠠⠁⠐⠌⠊⠡⠂⠱⠈⠖⠼⠃⠜⠬⠆⠈⠖⠣⠃⠐⠌⠊⠡⠂⠱⠤⠼⠑⠜⠈
⠬⠆⠨⠱⠠⠄

Przykład ten odczytamy tak:

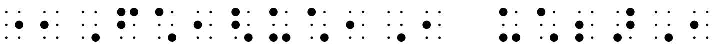
Pierwiastek z: otwarty okrągły nawias, "*a*" z indeksem "*i*" jeden, dodać dwa, zamknąć nawias, do kwadratu, dodać otwarty okrągły nawias, "*b*" z indeksem "*i*" jeden, odjąć pięć, zamknąć nawias, do kwadratu, koniec pierwiastka.

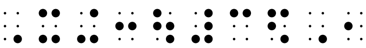
20.4 Zasady dotyczące tylnych dodatków

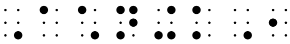
Tak zwane tylne dodatki są zapisywane po prawej stronie oznaczeń, których dotyczą. Są różne tylne dodatki, a wśród nich proste, złożone i szczegółowe. Nazwy te odpowiadają projektorom, które należy zastosować do ich zapisu. Oto kilka zasad, które ich dotyczą:

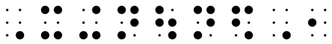
1. Każdy tylny dodatek następuje w brajlu po znaku głównym, którego dotyczy i jest rozpoczynany przez dodatkowy brajlowski znak zapowiadający ten dodatek.
2. Wyróżnia się dodatki proste, złożone i szczegółowe.
3. Zapisywanie dodatków przebiega zgodnie z regułami zapisu projektorów.
4. Gdy do jednego symbolu odnosi się kilka tylnych dodatków, zapisuje się je kolejno. Każdy z nich jest wprowadzany poprzez brajlowskie dodatkowe oznaczenie zapowiadające. Przyjęto zasadę, że wykładnik powinien stać na ostatnim miejscu w tym ciągu.

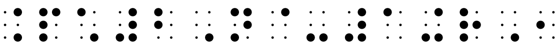
Oto kilka przykładów zaprezentowanych w notacji:

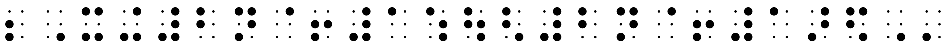
$f_1(u_1, u_2)$, 

$\frac{x^3}{3!}$, 

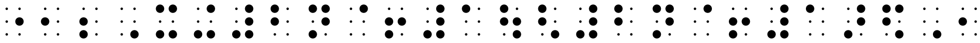
$(a_n)^k$, 

$\frac{x^n}{n!}$, 

(P_{2n-1}), 

$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, 

lub:



$f_n(x)$,

$f_{n+1}(x)$,

$g_{ij}(u^k)$,

$A_{-(n+1)}$,

$e^{+(\alpha t+\beta)}$,

F_{n_k}

lub:

$P_1, P_4, P_9, ..., P_{n^2}$,

$x^{n_1}, x^{n_2}, x^{n_4}, ..., x^{n_{2^k}}$,

$A_1 = a, A_2 = a^7, A_3 = a^{31}, A_k = a^{\left(2^{2k-1}-1\right)}$,

$\left(x^{\,i}_{\,n}\right)^r, \left(x_{n^i}\right)^r$,

$x_{\left(n^i\right)^r}, x_n^{i^r}$,⠠⠭⠐⠡⠝⠌⠊⠬⠗⠠⠂ ⠠⠭⠨⠡⠝⠐⠌⠊⠬⠗⠨⠱⠠⠂

$\left(P_{\rho_i}^{\rho_k}\right)^n$,⠨⠏⠐⠡⠰⠗⠡⠠⠊⠐⠌⠰⠗⠡⠠⠅⠐⠱⠬⠝⠠⠂

$\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, ⠆⠠⠑⠐⠬⠈⠆⠭⠬⠆⠳⠆⠐⠱⠳⠩⠼⠃⠰⠏⠠⠂

⠄⠄ lub: ⠐⠂⠠⠑⠐⠬⠈⠆⠭⠬⠆⠳⠆ ⠳⠩⠼⠃⠰⠏⠰⠠⠄

20.5 Zasady dotyczące przednich dodatków - przednie indeksy, przedrostki

Przednie indeksy, zwane przedrostkami, mogą występować w postaci prostej, złożonej oraz szczegółowej. Obowiązują w stosunku do nich następujące zasady:

1. Każdy przedrostek stoi przed znakiem głównym, do którego się odnosi. Jest wprowadzany przez podane w tabeli 14 znaki. Z reguły kończymy go znakiem kończącym projektor, który można pominąć, gdy przedrostek jest liczbą zapisaną cyframi obniżonymi lub gdy po nim następuje inny przedrostek. Z prawej strony przedrostek graniczy ze znakiem, którego dotyczy.
2. Można zastosować zapis lewostronnie swobodnego pełnego znaku przedrostka: znak liczbowy i (3,4)) ⠼⠌ dla górnego indeksu oraz (znak liczby i (1,6) ⠼⠡) dla dolnego indeksu. Mogą one być zastąpione przez skrócone oznaczenia indeksów, mające z lewej strony puste miejsca. Są to dwa znaki: (3,4) ⠌ oraz (1,6) ⠡ . Można z nich skorzystać, gdy nie utrudnia to odczytywania.
3. Jeżeli symbol posiada zarówno górny, jak i dolny przedrostek, to zapisuje się je po kolei. Każdy jest wprowadzany przez odpowiedni znak. Nie istnieje ogólna reguła dotycząca kolejności zapisywania przedrostków.
4. W notacji brajlowskiej stopień pierwiastka traktowany jest jako przedni, górny indeks. Nie trzeba w tym wypadku stosować znaku kończącego przedrostek.

5. W czarnym druku występują indeksy, które znajdują się bezpośrednio pod lub nad symbolem, którego dotyczą. W wersji brajlowskiej można je zapisać jako indeksy górne albo dolne. Ich właściwe położenie musi być wyjaśnione w przypisach. Operacja taka jest dopuszczalna jedynie wtedy, gdy w tekście nie występują inne przednie przedrostki. W razie konieczności do oznaczenia położonych bezpośrednio nad lub pod indeksów służą znaki pomocnicze:
   (1,2,3,4,6), (1,6), sz - ⠯ ⠡ ⠿
   (1,2,3,4,6), (3,4), sz - ⠯ ⠌ ⠿
   Są one wymienione w brajlowskiej notacji. Są traktowane jako pełne znaki przedrostków. Ich znaczenie powinno być wyjaśniane w technicznych uwagach brajlowskich lub w treści odnośnika.
6. W przypadku logarytmów, w których podstawy zapisuje się w czarnym druku nie pod znakiem logarytmu, lecz na dole za nim, należy w zapisie brajlowskim prezentować jako przednie górne indeksy.
7. Przednie przedrostki należy kończyć oznaczeniem obniżenia rzędu: (1,5,6) ⠱ . Można go pominąć, gdy indeks jest liczbą, którą zapisujemy obniżonymi cyframi.

<u>Przykład:</u>

Oznaczenia przednich przedrostków stosujemy dla zapisania stopni pierwiastków i podstaw logarytmów.

$\sqrt[3]{8} = 2,$

$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x,$

$5 + \log_{10} 3.$

⠐⠂⠌⠒⠩⠼⠓ ⠶⠼⠃⠠⠂

⠼⠌⠠⠁⠱⠋⠇⠭ ⠶⠌⠠⠁⠱⠫⠇⠃ ⠄⠌⠃⠱⠫⠇⠭⠠⠐

⠼⠑ ⠖⠌⠂⠴⠫⠇⠼⠉⠠⠄

lub jaśniej:

⠐⠂⠼⠌⠂⠴⠫⠇⠼⠉⠠⠄

<u>Przykład:</u>

$x \sqrt[n+1]{y}$ ⠐⠂⠠⠭⠄⠌⠝⠈⠖⠼⠁⠩⠽⠠⠄

Mnożymy tu "x" przez pierwiastek stopnia $n+1$ ⠐⠂⠠⠝⠈⠖⠼⠁ ⠠⠄ z "y". Po literze "x" umieszczono kropkę, która oznacza operację mnożenia oraz jest niezbędna przed stopniem pierwiastka. Zobaczmy ten przykład bez kropki:

⠐⠂⠠⠭⠌⠝⠈⠖⠼⠁⠩⠽⠠⠄

Taki zapis oznacza, że "x" ma górny indeks. Gdy zrezygnujemy z kropki, jako symbolu mnożenia, musimy zastosować pełny znak przedniego przedrostka:

⠐⠂⠠⠭⠼⠌⠝⠈⠖⠼⠁⠩⠽⠠⠄

<u>Przykład:</u>

${}_{i}^{j}m$

⠐⠂⠡⠠⠊⠌⠚⠱⠍ ⠠⠄ albo jaśniej:

⠐⠂⠼⠡⠠⠊⠌⠚⠱⠍⠠⠄

$A^{x \sqrt[n+1]{y}}$,

$A \cdot \sqrt[\frac{n}{m}]{\frac{y}{x}}$.

⠐⠂⠨⠁⠐⠬⠠⠭⠼⠌⠝⠈⠖⠼⠁⠩⠽⠠⠂
⠠⠁⠄⠐⠌⠝⠳⠍⠐⠩⠽⠳⠭⠠⠄

20.6 Zasady dotyczące pierwiastków

Wśród pierwiastków wyróżnia się również pierwiastki proste, złożone i szczegółowe. Odpowiadają im w czarnym druku tak zwane małe i duże znaki pierwiastka. Nazwy te sugerują rodzaj projektorów, z którymi są związane. Podobnie oznaczenia pierwiastków:

(1,4,6) - ⠩
(5), (1,4,6) - ⠐⠩
(4,6), (1,4,6) - ⠨⠩

Zapisuje się je według reguł przedstawionych w dalszej części poradnika.

Przykłady:

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071$ ⠐⠂⠩⠼⠃⠳⠆ ⠶⠼⠚⠂⠛⠚⠛⠁⠠⠄

$\sqrt{\frac{2}{2} = 1}$ ⠐⠂⠩⠼⠃⠳⠆ ⠶⠆⠩⠼⠃ ⠳ ⠩⠼⠃⠰ ⠶⠼⠁⠠⠄

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ⠐⠂⠩⠠⠁⠃ ⠶⠩⠁⠩⠃⠠⠄

$\frac{\sqrt{a}}{b} = \frac{1}{b} \cdot \sqrt{a}$ ⠐⠂⠩⠠⠁⠳⠃ ⠶⠼⠁⠲⠃⠩⠁⠠⠄

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ⠐⠂⠐⠩⠠⠁⠳⠃ ⠶⠩⠁⠳⠩⠃⠠⠄

$\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}$ ⠐⠂⠐⠩⠼⠃⠩⠼⠃ ⠶⠩⠼⠃ ⠄⠌⠲⠩⠼⠃⠠⠄

$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ⠐⠂⠠⠗ ⠶⠐⠩⠭⠡⠂⠬⠆⠈⠖⠭⠡⠆⠬⠆⠠⠄

lub: ⠐⠂⠶⠩⠠⠭⠡⠂⠬⠆⠈⠖⠭⠡⠆⠬⠆⠠⠄

$$\sqrt{x+y-2\sqrt{xy}}=\pm\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$$

⠐⠂⠐⠩⠠⠭⠈⠖⠽⠈⠤⠼⠃⠩⠭⠽ ⠶⠖⠤⠣⠩⠭ ⠤⠩⠽⠜⠠⠄

Równość ta wynika z równości:

⠐⠂⠠⠭⠈⠖⠽⠈⠤⠼⠃⠩⠭⠽ ⠶⠣⠩⠭ ⠤⠩⠽⠜⠬⠆ ⠠⠄ lub

⠐⠂⠠⠭⠈⠖⠽⠈⠤⠼⠃⠩⠭⠽ ⠶⠣⠤⠩⠭ ⠖⠩⠽⠜⠬⠆⠠⠂

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^{3}+\left(\frac{q}{2}\right)^{2}}}$$

⠐⠂⠠⠥ ⠶⠌⠒⠨⠩⠤⠆⠟⠳⠆⠈⠖⠤⠈

⠈⠐⠩⠣⠏⠳⠒⠜⠬⠒⠈⠖⠣⠟⠳⠆⠜⠬⠆⠨⠱⠠⠄

20.7 Sposoby zapisu ułamków z zastosowaniem techniki projekcji

Znak kreski ułamkowej podwyższa rząd znajdującego się przed nią licznika i następującego po niej mianownika. Sposób zapisu ułamków w notacji brajlowskiej został już omówiony. Jednak w połączeniu z pojęciem rzędu i z techniką projekcji, należy zwrócić uwagę na kilka kwestii:

1. Zarówno ułamki z kreską ułamkową umieszczoną na poziomie podstawowym, jak i zawarte w innych projektorach, zapisuje się według przedstawionych wcześniej reguł.
2. Nie wszystkie rodzaje projektorów mogą zawierać ułamki:
    a. projektory proste nie mogą zawierać ułamków,
    b. ułamki w projektorach złożonych nie mogą zawierać odstępów,

c. ułamki zapisane w projektorach szczegółowych nie podlegają żadnym ograniczeniom.

3. Jeśli ułamek zawiera się w projektorze, należy zaznaczyć początek licznika i koniec mianownika. Oznacza to, że ułamek zostaje wprowadzony przez znak początku licznika. W przypadkach koniecznych należy go poprzedzić punktem 4. Znak końca ułamka może być zastąpiony przez znak obniżający rząd (1,5,6) ⠱ .

Przykład:

$$e^{-\left(\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}\right)t};$$

$$e^{\kappa\frac{a+b}{2}+\mu\frac{2}{a+b}+c};$$

⠐⠂⠠⠑⠨⠬⠤⠣⠨⠗⠳⠼⠃⠇ ⠖⠤⠐⠩⠈⠆⠗⠬⠆⠳⠼⠙⠇⠬⠆⠰⠠
⠤⠆⠼⠁⠳⠇⠉⠐⠱⠜⠠⠶⠨⠱⠠⠆

⠠⠑⠐⠬⠰⠅⠈⠆⠠⠁⠈⠖⠃⠳⠆⠈⠖⠰⠍⠈⠆⠼⠃⠳⠠⠁⠈⠖⠃⠰⠈⠖⠉⠠⠆
⠠⠑⠨⠬⠰⠅⠈⠆⠠⠁⠈⠖⠃⠳⠆ ⠖⠰⠍⠈⠆⠼⠃⠳⠠⠁⠈⠖⠃⠈⠖⠉⠨⠱⠠⠄

Przykład:

Pierwiastek kwadratowy z liczby k zapisujemy $\sqrt{k}$ ⠐⠂⠩⠠⠅⠠⠄

Natomiast pierwiastek stopnia p zapisujemy: $\sqrt[p]{k}$ ⠐⠂⠌⠠⠏⠱⠩⠅⠠⠄

Jeżeli $p \in \mathbf{N}$ ⠐⠂⠠⠏⠈⠑⠨⠨⠝ ⠠⠄ to stopień pierwiastka zapisujemy obniżonymi cyframi bez znaku liczbowego.

Używając oznaczenia złożonej lub szczegółowej projekcji mamy:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \ \frac{\sqrt{4}}{2} = 1,$$
$$\sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2}.$$

⠐⠂⠐⠩⠠⠁⠳⠃ ⠶⠩⠠⠁⠳⠩⠃⠠⠂ ⠩⠼⠙⠳⠆ ⠶⠼⠁⠠⠂
⠐⠩⠼⠙⠳⠆ ⠶⠩⠼⠃⠠⠄

Przykład:

Bardzo trudny w brajlu jest zapis indeksów złożonych. Są do tego potrzebne oznaczenia złożonej i szczegółowej projekcji. Objaśnimy jak zapisać poszczególne rodzaje indeksów:

A_{ij} ⠨⠁⠡⠊⠡⠚ oznacza, że A ma dwa indeksy dolne;

A_{i_j} ⠨⠁⠐⠡⠊⠡⠚ oznacza, że A ma tylko jeden indeks dolny i który ma również dolny indeks j. Jeżeli A ma dolny indeks i oraz górny indeks j i oba mają dolne indeksy odpowiednio: k i l to zapisujemy to następująco:

$A_{i_k}^{j_l}$ ⠨⠁⠐⠡⠊⠡⠅⠐⠌⠚⠡⠇ .

20.8 Specjalne nawiasy w systemie brajla

W bardziej skomplikowanych formułach możemy połączyć grupy dodatków, wyrażenia podpierwiastkowe itp. specjalną klamrą. Stosuje się dla nich nawiasy pokazane w tabeli 13.1. Przednie i tylne ograniczenia ułamków, początkowe i końcowe znaki szczegółowych projektorów również mogą służyć jako tego rodzaju nawiasy.

Stosowanie nawiasów brajlowskich ujawnia swoje zalety zwłaszcza w połączeniu z techniką projekcji. Można na przykład umieścić w specjalnym nawiasie wyrażenie będące w czarnym druku pierwszym rzędem i traktować go jako względną podstawę do dalszego konstruowania. Gdy kreska ułamkowa znajduje się na poziomie podstawowym (rząd zerowy), ułamek zapisuje się szczegółowo.

Przykład:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{tg\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{tg\,\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\frac{x_1y_1+\ldots+x_ny_n}{\sqrt{x_1^{\;2}+\ldots+x_n^{\;2}}\cdot\sqrt{y_1^{\;2}+\ldots y_n^{\;2}}}$$

⠐⠂⠠⠁⠈⠖⠃⠳⠁⠈⠤⠃⠈⠶⠆⠫⠞⠁⠈⠖⠃⠳⠆⠳⠫⠞⠁⠈⠤⠃⠳⠆⠰⠂
⠆⠠⠭⠡⠂⠽⠡⠂ ⠖⠄⠄⠄ ⠖⠭⠡⠝⠠⠽⠡⠝⠠
⠳ ⠐⠩⠭⠡⠂⠬⠆⠈⠖⠄⠄⠄⠈⠖⠭⠡⠝⠬⠆⠈
⠈⠐⠩⠽⠡⠂⠬⠆⠈⠖⠄⠄⠄⠈⠖⠽⠡⠝⠬⠆⠰⠄

21. Symbole zaznaczające

21.1 Oznaczenia, które w czarnym druku umieszczone są na górze lub na dole z prawej strony znaku głównego

[Tabela 15.1]

1. prawy prim	⠿ ⠔
2. podwójny prawy prim	⠿ ⠔ ⠔
3. gwiazdka	⠿ ⠲
4. krzyżyk	⠿ ⠦

5. plus ⠿⠖
6. minus ⠿⠤
7. prostokątny haczyk ⠿⠹ ⠿

<u>Przykład:</u>

Niech $f:(a,b)\to \mathbf{R}$ ⠐⠂⠠⠋⠒⠣⠁⠂⠃⠜ ⠒⠂⠨⠨⠗ ⠠⠄ jeżeli istnieje granica:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)+h-f(x_0)}{h}$$

⠂⠂⠼⠇⠡⠠⠓⠈⠒⠂⠼⠚ ⠆⠠⠋⠣⠭⠡⠴⠈⠖⠓⠜⠈⠤⠋⠣⠭⠡⠴⠜⠳⠓

⠠⠄ to nazywamy ją pochodną funkcji f w punkcie x_0 ⠠⠭⠡⠴ i oznaczamy: $f'(x_0)$ ⠠⠋⠔⠣⠭⠡⠴⠜.

21.2 Oznaczenia, które w czarnym druku umieszczone są na górze lub na dole znaku głównego

[Tabela 15.2]

1. pozioma kreska ⠿⠒
2. wężyk ⠿⠢
3. uśmieszek ⠿⠣ ⠿
4. haczek ⠿⠩ ⠿
5. daszek ⠿⠬ ⠿
6. ptaszek ⠿⠈⠩ ⠿
7. znak równości ⠿⠶
8. strzałka w prawo ⠿⠒⠂
9. strzałka w lewo ⠿⠐⠒ ⠿

10. klin w prawo ⠿⠹⠲⠂⠿
11. klin w lewo ⠿⠹⠐⠲⠿
12. kółko ⠿⠴
13. lewy prim ⠿⠜⠔
14. prawy prim ⠿⠔
15. kropka ⠿⠆
16. dwie kropki ⠿⠆⠆

Niektóre symbole z powyższej tabeli odpowiadają czarnodrukowym oznaczeniom akcentów, przedstawionym w tabeli 3.2. Akcenty mają zastosowanie wyłącznie do liter alfabetu łacińskiego w tekście zwykłym. Powyższe znaki mają zastosowanie dla formuł matematycznych. Gdy jednak są one w czarnym druku identyczne, dobrze jest nie odróżniać ich również w brajlu.

Przykład:

Dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi:

⠐⠂⠨⠁ ⠣⠄⠨⠁⠒ ⠠⠄ zbiór A ⠨⠁ zawiera się w swoim domknięciu,

⠐⠂⠨⠁⠴ ⠣⠄⠨⠁ ⠠⠄ wnętrze zbioru A ⠨⠁ jest zawarte w zbiorze A ⠨⠁ ,

⠣⠨⠁⠈⠯⠩⠨⠃⠜⠒ ⠶⠨⠁⠒ ⠯⠩⠨⠃⠒ ⠠⠄ domknięcie sumy zbiorów A ⠨⠁ i B ⠨⠃ jest równe sumie domknięć zbiorów A ⠨⠁ i B ⠨⠃

⠨⠁⠴ ⠯⠩⠨⠃⠴ ⠣⠄⠣⠨⠁ ⠯⠩⠨⠃⠜⠘⠴ ⠠⠄ suma wnętrz zbiorów A ⠨⠁ i B ⠨⠃ zawiera się we wnętrzu sumy zbiorów A ⠨⠁ i B ⠨⠃

⠐⠂⠨⠨⠗⠒ ⠶⠨⠨⠗ ⠯⠩⠣⠤⠼⠿⠂⠼⠿⠜⠠⠐

⠠⠄ gdzie: ⠐⠂⠨⠒⠨⠁⠠⠂ ⠨⠁⠘⠒ ⠠⠄ lub ⠐⠂⠨⠁⠒ ⠠⠄ oznaczają domknięcie zbioru A ⠨⠁ natomiast ⠨⠁⠴ lub ⠨⠁⠘⠴ oznaczają wnętrze zbioru A ⠨⠁ .

22. Znaki analizy matematycznej

[Tabela 17]

1. granica	⠼⠇
2. granica dolna	⠼⠇⠰⠒
3. granica górna	⠼⠇⠘⠒
4. nieskończoność	⠼⠿
5. strzałka pod znakiem granicy	⠿⠈⠒⠂⠿
6. wartość bezwzględna	⠈⠸⠿⠠⠠⠿⠸
7. norma wektora	⠈⠸⠸⠿⠠⠿⠸⠸
8. pochodna cząstkowa	⠹⠿
9. suma	⠸⠎ ⠯⠎
10. iloczyn, produkt	⠸⠏ ⠯⠏
11. całka	⠮
12. całka dolna	⠮⠰⠒
13. całka górna	⠮⠘⠒
14. całka okrężna	⠮⠴
15. całka powierzchniowa	⠮⠮⠴
16. (pionowa) kreska całkowa	⠿ ⠸⠿
17. znaki szczególnego typu całki	⠘⠮ ⠈⠮
lub:	⠨⠮ ⠸⠮ ⠼⠮
18. dolna granica całkowania	⠿⠡⠿
lub:	⠿⠐⠡⠿
lub:	⠿⠨⠡⠿
19. górna granica całkowania	⠿⠌⠿
lub:	⠿⠐⠌⠿
lub:	⠿⠨⠌⠿

Symbole: całki, sumy i iloczynu odnoszą się do stojących po ich prawej stronie ciągów znaków, które oddzielone są od nich odstępem. Litery reprezentujące zmienne, względem których wykonywane są wymienione operacje, następują bezpośrednio po brajlowskim oznaczeniu operacji i zakończone są znakiem obniżenia rzędu (1,5,6) ⠱ .

<u>Przykład:</u>

$$\sum_{\nu} a ,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a\nu ,$$

⠐⠂⠸⠎ ⠄⠁⠡⠰⠝ ⠄⠄⠇⠥⠃ ⠐⠂⠯⠎ ⠄⠁⠡⠰⠝

⠸⠎⠰⠝⠱⠡⠂⠌⠠⠝ ⠁⠡⠰⠝⠠⠠

Dolne i górne granice całkowania, sumowania oraz iloczynu są zapisywane jako dolne i górne indeksy. Jeśli mają prostą budowę, są zwykłymi indeksami, dla których stosuje się proste projektory. Gdy jednak mają bardziej skomplikowaną budowę, muszą być zapisywane jako projektory złożone lub nawet szczegółowe. W projektorach prostych wszystkie elementy są na tym samym poziomie. Gdy ten warunek nie może być spełniony, mamy do czynienia z projektorami złożonymi. Dla wskazania takiej sytuacji piszemy przed początkiem poziomu punkt 5.

$$\sum_{k=1}^{n}$$

$$\sum_{k_1=1}^{n_1}$$

⠐⠂⠸⠎⠠⠅⠱⠡⠂⠌⠝

⠸⠎⠠⠅⠁⠂⠱⠡⠂⠐⠌⠝⠡⠂

Wyrażenie, które w czarnym druku znajduje się pod znakiem granicy (pod napisem "lim") ma w zapisie brajlowskim znak liczbowy i "l" i jest zapisywane jako dolny indeks.

Przykład:

$\lim\limits_{n\to\infty}$ czytamy: granica przy n dążącym do nieskończoności,

$\lim\limits_{h\to 0}$ czytamy: granica przy h dążącym do zera,

$e^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$ czytamy: e podniesione do potęgi: granica z $f(x)$ przy x dążącym do x_0.

Przykład:

Obliczyć granice funkcji:

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x+1}{5x+2},$$

$$\lim_{x\to -2^+}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{-2x}{x+2}}.$$

Zapis oznacza, że granica jest liczona dla x dążącego do -2 z prawej strony. W czarnym druku -2^{+} jest zapisywane jako -2 z plusem po prawej stronie u góry.

Przykład:

Obliczyć:

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ jeżeli:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2-x}{4-x} \text{ dla } x<-4 \\ 3x+7 \text{ dla } x \geq -4 \end{cases}$$

oraz $x_0=-4$

W powyższym przykładzie w punkcie x_0 jest liczona granica lewostronna. Informuje o tym stojący za x_0 symbol W czarnym druku jest to minus w miejscu prawego górnego indeksu.

Przykład:

Ponieważ symbole plus i minus oznaczające zbieżność jednostronną znajdują się w miejscu górnych indeksów, to zamiast:

$\lim\limits_{x \to x_0^-}$ i $\lim\limits_{x \to x_0^+}$

i

można napisać:

⠐⠂⠼⠇⠐⠡⠠⠭⠈⠒⠂⠭⠡⠴⠌⠤ ⠾⠇⠐⠡⠠⠭⠈⠒⠂⠭⠡⠴⠌⠈⠖

Jednak pierwszy zapis wydaje się bardziej czytelny – szczególnie dla zbieżności prawostronnej.

Przykład:

Łatwo zauważyć, że nie istnieje:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n$$

⠐⠂⠼⠇⠡⠠⠝⠈⠒⠂⠼⠿ ⠣⠤⠼⠁⠜⠬⠝⠠⠄

Jednak istnieją granice dolne i górne tego ciągu równe odpowiednio:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}(-1)^n = -1,$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(-1)^n = 1.$$

⠐⠂⠼⠇⠰⠒⠡⠠⠝⠈⠒⠂⠼⠿ ⠣⠤⠼⠁⠜⠬⠝ ⠶⠤⠼⠁⠠⠂

⠼⠇⠘⠒⠡⠠⠝⠈⠒⠂⠼⠿ ⠣⠤⠼⠁⠜⠬⠝ ⠶⠼⠁⠠⠄

Granicę dolną oznacza się również ⠐⠂⠼⠇⠊ ⠠⠄ lub ⠐⠂⠻⠇⠊⠍⠊⠝⠋⠠⠄ natomiast granicę górną oznacza się także ⠐⠂⠼⠇⠎ ⠠⠄ lub ⠐⠂⠻⠇⠊⠍⠎⠥⠏⠠⠄

23. Alfabet grecki

Duże litery alfabetu greckiego poprzedzamy znakiem (4,5,6) ⠸, a małe - znakiem (5,6) ⠰. Przedstawiony w rozdziale 32 części IV alfabet pisma matematycznego odpowiada staremu alfabetowi greckiemu, który jest dla tego pisma zarezerwowany. W innych przypadkach zaleca się używanie alfabetu filologicznego. W systemie punktowym kształty liter obu alfabetów, z wyjątkiem trzech, nie różnią się niczym. W przypadku alfabetu filologicznego, używanego w tekstach zwykłych, pomijamy oznaczenia małych i dużych liter: (5,6) i (4,5,6) ⠰ i ⠸ na takich samych zasadach, jak w przypadku alfabetu łacińskiego.

Aby znaki brajlowskie (1,5,6), (1,4,5,6) i (1,2,3,4,6):

⠱ "ę" - oznaczenie zakończenia projektora,
⠹ "ń", - oznaczenie pochodnej cząstkowej,
⠯ "ż" - brajlowski klucz dla symboli arbitralnych,

które w alfabecie łacińskim nie są używane, a które mają konkretne znaczenie w matematycznych formułach, mogły być w nich bezkonfliktowo używane, wprowadzono dla odpowiadających im greckich liter "eta", "teta" i "chi" oznaczenia alternatywne:

1. ⠰⠱ = ⠰⠚
2. ⠰⠹ = ⠰⠓
3. ⠰⠯ = ⠰⠉

Gdy wymienione trzy litery są używane wyłącznie w formułach matematycznych, stosujemy drugie ich oznaczenia. Gdy jednak pojawiają się zarówno w matematycznych formułach, jak i w tekście zwykłym, należy używać te pierwsze. Należy wtedy bezwzględnie stosować oznaczenia alfabetu, by liter "eta", "teta" oraz "chi" nie pomylić ze wspomnianymi wyżej matematycznymi oznaczeniami.

W matematyce często używa się znaków powstałych poprzez stylizację następujących starogreckich liter: epsilon, teta, pi, ro, sigma i fi.

Nazywamy je stylizowanymi literami greckimi i oznaczamy odpowiednio:

1. epsilon ⠈⠰⠑
2. teta ⠈⠰⠹
3. pi ⠈⠰⠏
4. ro ⠈⠰⠗
5. sigma ⠈⠰⠎
6. fi ⠈⠰⠋

24. Zbiór znaków dodatkowych

Pojawiają się nowe symbole, których odpowiedniki w systemie brajla należy na bieżąco projektować. Dla takich nowych znaków można skorzystać z oznaczenia (klucza): dl, sz - ⠨⠿ , po którym może nastąpić:

1. numer wprowadzanego oznaczenia,
2. skrót nazwy,
3. specyficzny brajlowski znak, który może być po zaakceptowaniu i rozpopularyzowaniu drukowany bez prefiksu (klucza) ⠨⠿ .

W notacji, w tabeli 21, są zaprezentowane trzyliterowe oznaczenia symboli. Te, które okażą się bardziej popularne, mogą zostać skrócone do jednej litery stojącej za kluczem ⠨⠿ , albo pozostać w postaci trzyliterowej z jego pominięciem.

Poniżej przypominamy skrócony zapis kilku oznaczeń:

karo	⠨⠿⠙⠍⠝ = ⠙⠍⠝	lub	⠨⠿⠙
kier	⠨⠿⠓⠗⠺ = ⠓⠗⠺	lub	⠨⠿⠓
pik	⠨⠿⠎⠏⠙ = ⠎⠏⠙	lub	⠨⠿⠎
trefl	⠨⠿⠉⠇⠃ = ⠉⠇⠃	lub	⠨⠿⠉

kropla	⠨⠿⠃⠇⠞ = ⠃⠇⠞	lub	⠨⠿⠃
diament	⠨⠿⠙⠍⠙ = ⠙⠍⠙	lub	⠨⠿⠙⠍

O tego rodzaju skrótach należy do czasu ich powszechnego przyjęcia każdorazowo informować w technicznej uwadze brajlowskiej. Pełną tabelę propozycji nowych oznaczeń przedstawiamy w rozdziale 32 części IV.

25. Ogólne zasady dotyczące notacji brajlowskiej

25.1 Formuły, które nie mieszczą się w jednej linijce

Jeśli formuła matematyczna nie mieści się w jednej brajlowskiej linijce, musi być przeniesiona do następnej. W przeciwieństwie do pisma czarnodrukowego, części formuły przypadającej na jedną brajlowską linijkę nie kończy się w miejscu, gdzie jest znak operacji. Gdyby tak było, następna linijka rozpoczynałaby się od takiego samego znaku. W brajlu wykorzystuje się tak zwany znak oddzielania linijek. Przy jego użyciu obowiązują następujące reguły:

a. W miarę możliwości łamanie formuły i przenoszenie dalszej jej części powinno następować tam, gdzie w normalnym zapisie jest odstęp. Wówczas stosuje się znak punktu (6). Wskazuje on na to, że formuła nie została zakończona. Znak ten jest ostatnim znakiem w linijce.
b. Gdy w linijce nie zmieści się już żadne oznaczenie, musimy przenieść dalszą część formuły do następnej. Często zdarza się, że następuje ono w miejscu, gdzie nie ma odstępu. W takiej sytuacji umieszczamy na końcu łamanej linijki inny znak przeniesienia - punkt 4. W celu przejrzystości należy ponownie użyć znaku punktu 4 na początku następnej linijki.

25.2 Brajlowskie uwagi techniczne

Stosowanie skrótów

Techniczne uwagi brajlowskie wprowadzone w celu objaśnienia szczegółów zapisu, nie pochodzące z tekstu czarnodrukowego, wprowadzane są znakiem (1,2,3,4,6), (1,2,3,4,6) ⠯⠯ . Pewne przypadki, w których takie uwagi są konieczne lub pożądane, zostały już wymienione. Oto specjalna procedura stosowania skrótów.

1. Jeśli w tekście pojawia się na przykład różniczka *d* ⠐⠂⠙ ⠠⠄ i nie występuje żadne inne "*d*" ⠙ , ani "<*d*" ⠰⠙ , można za pomocą specjalnego oznaczenia poinformować, że chodzi tu wyłącznie o małe łacińskie "*d*", które może być zapisywane w ogóle bez znaku alfabetu - punktu 6 ⠠ :
   (1,2,3,4,6), (1,2,3,4,6), d, (4), (2,3,5,6), (6), d,
   ⠯⠯⠙⠈⠶⠠⠙
   W tej brajlowskiej uwadze technicznej informujemy, iż oznaczenie stojące po lewej stronie znaku równości jest równoważne oznaczeniu z jego prawej strony. Za każdym razem, gdy spotkamy samo "*d*", mamy wiedzieć, że chodzi o małe łacińskie "*d*" - ⠠⠙ .

2. Gdy w tekście występują w zerowym rzędzie wyłącznie małe łacińskie litery i małe greckie litery w dolnych indeksach, możemy napisać:
   (1,2,3,4,6), (1,2,3,4,6), (6), sz., (1,6), (5,6), sz,
   ⠯⠯⠠⠿⠡⠰⠿
   Oznaczenie alfabetu jest wówczas w formułach pomijane. Sześciopunkt jest tu rozumiany jako dowolna litera. To specjalne oznaczenie należy odczytywać jako zapowiedź pomijania oznaczenia małych liter łacińskiego alfabetu punktem 6, gdyż tylko taki alfabet jest używany w rzędzie zerowym oraz zapowiedź pomijania oznaczenia małych liter greckich, gdyż tylko takie litery są w dolnych indeksach.

W podobny sposób można tworzyć inne reguły, dotyczące zapisu. Poinformujmy, że w tekście nie będziemy stawiali żadnych oznaczeń alfabetów:

⠯⠯⠠⠿⠈⠶⠨⠿⠈⠶⠰⠿⠈⠶⠸⠿⠈⠶⠐⠿⠈⠶⠘⠿⠈⠶⠿

Uwagę tę odczytujemy tak:

Dowolne litery: małe i duże łacińskie, greckie i gotyckie zapisujemy bez oznaczenia alfabetu. Sześciopunkt stojący na końcu uwagi poinformował, że chodzi o każdą literę.

⠯⠯⠸⠡⠿⠸⠿⠈⠶⠿

Uwagę tę odczytujemy z kolei tak:

Dowolne litery zapisujemy bez oznaczenia rodzaju druku. Sześciopunkt pomiędzy dwiema pałkami oznacza dowolny rodzaj druku, a stojący na końcu uwagi informuje, że chodzi o każdą literę.

25.3 Kilka uwag o formie edytorskiej matematycznego tekstu

1. W stosunku do dzielenia tekstu na akapity i zalecanymi w związku z tym wcięciami, obowiązują ogólne zasady. Odnalezienie odpowiedniego akapitu jest z pewnością łatwiejsze, gdy na początku wciętego wiersza w zerowej kolumnie umieści się znak zaznaczający akapit.
2. Numery formuł umieszcza się w systemie brajlowskim zawsze przy lewej krawędzi strony. Numery te zapisuje się cyframi nieobniżonymi, poprzedzonymi znakiem liczbowym i umieszcza w nawiasach kwadratowych. Można przesunąć te oznaczenia o jedno miejsce poza lewą krawędź tekstu, do kolumny zerowej lub wpisać do niej oznaczenie początku ważnego fragmentu.
3. Jeśli formuły zajmujące więcej niż jedną linijkę następują bezpośrednio po sobie, początek każdej z nich może być wsunięty lub wysunięty, na przykład o dwa miejsca.

4. W tekście zwykłym można używać brajlowskich skrótów. Dotyczy to również słów wtrąconych pomiędzy matematyczne formuły.
5. Nie powinno się tracić miejsca na puste linijki w spisach treści, bibliografiach, po tytułach poszczególnych rozdziałów. Podobnie można unikać wydruku linii podkreśleń przed treścią odnośników i ramek zaznaczających ważne fragmenty.
6. Notacja ośmiopunktowa, o której w niniejszym poradniku nie mówimy, może zastąpić notację sześciopunktową. Przedstawiona tu notacja sześciopunktowa nie jest optymalna pod względem oszczędności miejsca. Jest opracowana dla maksymalnego uproszczenia nauki. Przyjęto, że w notacji ośmiopunktowej:
   - siódmy punkt zaznacza duże litery alfabetu łacińskiego, albo powiększone wersje podstawowych znaków,
   - ósmy punkt zaznacza podwojenie, pogrubienie, przedłużenie, modyfikację lub stylizację znaków podstawowych.
7. Na dole strony powinny się znaleźć: numer strony, numer rozdziału i jego tytuł (w całości, albo w formie skróconej).

25.4 Oznaczenia stawiane na lewym marginesie w zerowej kolumnie brajlowskiego wydruku

Oznaczenia stawiane na lewym marginesie wydruku, w tak zwanej zerowej kolumnie, służą ułatwieniu znajdowania ważnych fragmentów tekstu. Są zamieszczane w zerowej kolumnie wydruku, w linijce, w której znajduje się początek wskazywanego fragmentu. Znaki te nie są obligatoryjne. Zamieszczone poniżej oznaczenia są przygotowane dla publikacji w języku polskim. W notacji znajdują się propozycje dla tekstów angielskich i niemieckich.

1. twierdzenie	t	⠞
2. lemat	l	⠇
3. dowód	w	⠺
4. definicja	d	⠙
5. aksjomat	a	⠁
6. uwaga	u	⠥
7. odnośnik	o	⠕
8. wzór z numerem	[	⠷
9. notka	n	⠝
10. nowy rozdział	r	⠗
11. paragraf	p	⠏
12. spis treści	s	⠎
13. bibliografia	b	⠃
14. wyróżniony fragment	f	⠋
15. oznaczenie ramki	|	⠸
16. tabela	{	⠪
17. kontynuacja	+	⠖
18. koniec zaznaczonego tekstu	ę	⠱
19. akapit	-	⠤

25.5 Wyróżnianie fragmentów tekstu ramkami

Elementy konstrukcyjne dla brajlowskich ramek

Ramki zbudowane są z narożników, kresek poziomych i pionowych. W notacji znajdujemy kilka propozycji kształtów brajlowskich ramek. Przedstawiono elementy konstrukcyjne ramek rozpoczynając od lewego górnego narożnika, kierując się zgodnie z ruchem wskazówek zegara:

lewy górny narożnik,

kreska pozioma,

prawy górny narożnik,

prawa kreska pionowa,

prawy dolny narożnik,

kreska pozioma,

lewy dolny narożnik,

lewa kreska pionowa.

Ramka najprostsza:

1. lewy górny narożnik - (2,3,5) - ⠿ ⠖
2. kreska pozioma - (2,5) - ⠿ ⠒
3. prawy górny narożnik - (2,5,6) - ⠿ ⠲
4. prawa kreska pionowa - (4,5,6) - ⠿ ⠸
5. prawy dolny narożnik - (2,4,5) - ⠿ ⠚
6. kreska pozioma - (2,5) - ⠿ ⠒
7. lewy dolny narożnik - (1,2,5) - ⠿ ⠓
8. lewa kreska pionowa - (1,2,3) - ⠿ ⠇

⠖⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠲
⠇⠀⠨⠗⠁⠍⠅⠁⠀⠏⠗⠕⠎⠞⠁⠀⠀⠀⠀⠀⠸
⠓⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠒⠚

Ramka pogrubiona:

1. lewy górny narożnik - (2,3,5,6) - ⠿ ⠶
2. kreska pozioma - (2,3,5,6) - ⠿ ⠶
3. prawy górny narożnik - (2,3,5,6) - ⠿ ⠶
4. prawa kreska pionowa - sz - ⠿ ⠿
5. prawy dolny narożnik - (1,2,3,4) – ⠿ ⠛

6. kreska pozioma - (1,2,4,5) - ⠿⠛

7. lewy dolny narożnik - (1,2,4,5) - ⠿⠛

8. lewa kreska pionowa - sz - ⠿⠿

```
⠶⠶⠶⠶⠶⠶⠶⠶⠶⠶⠶⠶⠶⠶⠶⠶⠶⠶⠶⠶⠶
⠿ ⠨⠗⠁⠍⠅⠁ ⠏⠕⠛⠗⠥⠃⠊⠕⠝⠁  ⠿
⠛⠛⠛⠛⠛⠛⠛⠛⠛⠛⠛⠛⠛⠛⠛⠛⠛⠛⠛⠛⠛
```

Ramka ozdobna:

1. lewy górny narożnik - (3,5) - ⠿⠔

2. kreska pozioma 1 - (2,6) - ⠿⠢

3. kreska pozioma 2 - (3,5) - ⠿⠔

4. prawy górny narożnik - (2,6) - ⠿⠢

5. prawa kreska pionowa - (2,4,6) - ⠿⠪

6. prawy dolny narożnik - (2,4) - ⠿⠊

7. kreska pozioma 1 - (1,5) - ⠿⠑

8. kreska pozioma 2 - (2,4) - ⠿⠊

9. lewy dolny narożnik - (1,5) - ⠿⠑

10. lewa kreska pionowa - (1,3,5) -⠿ ⠕

```
⠔⠢⠔⠢⠔⠢⠔⠢⠔⠢⠔⠢⠔⠢⠔⠢⠔⠢⠔⠢
⠕ ⠨⠗⠁⠍⠅⠁ ⠕⠵⠙⠕⠃⠝⠁     ⠪
⠑⠊⠑⠊⠑⠊⠑⠊⠑⠊⠑⠊⠑⠊⠑⠊⠑⠊⠑⠊
```

Pozostawia się swobodę w konstruowaniu ramek. Można dobierać różne znaki brajlowskie w taki sposób, by wyróżniały zawartą w ramce treść.

25.6 Odsyłacze i treści odnośników

W czarnym druku często spotykamy odsyłacze i treść odnośników. Są one stosowane, gdy autor chce dodać do tekstu pewną uwagę, refleksję, dodać tekst na marginesie. Dodawaną tam treść drukuje się na dole strony lub na boku. W treści zamieszcza się jedynie odsyłacz. Jak to wygląda w brajlu?

Kolejny odsyłacz o numerze *nr*, dla którego treść objaśnienia znajduje się na dole strony, zapisuje się tak:
(3,5), zn., kolejny numer odnośnika zapisany obniżonymi cyframi ⠔ ⠼ ⠠ *nr*

Tak więc:
odsyłacz pierwszy - (3,5), zn., (2) - ⠔ ⠼ ⠂
odsyłacz drugi - (3,5), zn., (2,3) - ⠔ ⠼ ⠆
odsyłacz jedenasty - (3,5), zn., (2), (2) - ⠔ ⠼ ⠂ ⠂

Kolejny odsyłacz, dla którego treść objaśnienia znajduje się na dole strony wygląda tak:
(3,5), specjalny symbol - ⠔ symb

Tak więc:
Odsyłacz oznaczony muszką - (3,5), dl, sz, bwt - ⠔ ⠨ ⠿ ⠃ ⠺ ⠞

Kolejny odsyłacz o numerze *nr*, dla którego treść objaśnienia znajduje się w oryginale na marginesie, a w brajlu na dole strony:
(3,5), (3,5), zn., stosowny numer zapisany obniżonymi cyframi - ⠔ ⠔ ⠼ ⠠ *nr*

odsyłacz pierwszy - (3,5), (3,5), zn., (2) - ⠔ ⠔ ⠼ ⠂
odsyłacz drugi - (3,5), (3,5), zn., (2,3) - ⠔ ⠔ ⠼ ⠆
odsyłacz jedenasty - (3,5), (3,5), zn., (2), (2) - ⠔ ⠔ ⠼ ⠂ ⠂

Kolejny odsyłacz oznaczony specjalnym symbolem, dla którego treść objaśnienia znajduje się w oryginale na marginesie, a w brajlu na dole strony,
(3,5), (3,5), specjalny symbol - ⠔ ⠔ ⠎ ⠽ ⠍ ⠃

Odsyłacz oznaczony muszką - (3,5), (3,5), dl, sz, bwt - ⠔ ⠔ ⠨ ⠿ ⠃ ⠺ ⠞

W linijce, w której występuje odsyłacz do treści notki z marginesu, powinien w zerowej kolumnie pojawić się znak "n". Podobnie w zerowej kolumnie linijki, w której jest odsyłacz do odnośnika, powinien być zamieszczony znak "o". Jeśli w jednej linijce znajdą się jednocześnie odsyłacze do treści odnośnika i notki, to w zerowej kolumnie powinien się pojawić znak "n".

Treść odnośnika i notki z marginesu umieszczamy więc na końcu strony. Warto poprzedzić je linijką znaków (2,5). Pierwszą linijkę ich treści możemy zaznaczyć brajlowskim znakiem "o" lub "n" umieszczonym w zerowej kolumnie wydruku. Pierwsze linijki zawsze są wcięte o dwie spacje i zaczynają się od stosownego numeru poprzedzonego jedną lub dwiema gwiazdkami (znaki (3,5) w tekście zwykłym). Numer jest we wszystkich przypadkach napisany obniżonymi cyframi.